Revisão de Probabilidades

Prof.: S. Motoyama

Experimentos e Espaços Amostrais

- Experimentos em que resultados não são certos: experimentos aleatórios
- Experimento aleatório: não se define, é um conceito primitivo em probabilidade
- Exemplos: lançamento de moeda; lançamento de dados; valor de um resistor no processo de fabricação; jogo de cartas
- Associado com o experimento estão os resultados

  Exemplos: {cara, coroa}; {1, 2, 3, 4, 5, 6};

  {101, 100, 102, 103}; {7 de espada, 8 de copas}
- Espaço amostral (S): todos os resultados possíveis de um experimento aleatório

Experimentos e Espaços Amostrais

Exemplos: Lançamento de duas moedas

S = {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}

Lançamento de dados: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Comprimento entre 0 e 1: $S = \{x \in R \;/\; 0 \leq x \leq 1\}$

S = conjunto de todos os resultados possíveis

- Sejam A e B dois conjuntos
- Conjuntos iguais → A = B se A e B contêm os mesmos elementos

Exemplo: A = {1, 2} e B = {2, 1} → A = B

- Subconjunto: A é subconjunto de B, $A \subset B$, se cada elemento de A é também um elemento de B

Experimentos e Espaços Amostrais

- União: A∪ B ou A + B é conjunto tal que os elementos pertencem tanto a A como ao B (ou ambos)
- Intersecção: A ∩ B ou A . B é o conjunto tal que os elementos pertencem a A e B
- Complemento: $\bar{A}$ é o conjunto de elementos que pertencem a S mas não a A
- $\emptyset =$ conjunto vazio, conjunto que não possui elementos

$\bar{S} = \emptyset$

$\overline{\emptyset} = S$

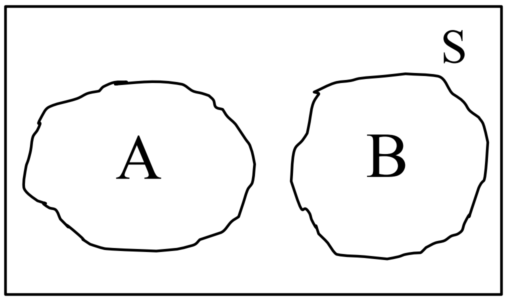
$S + A = S$

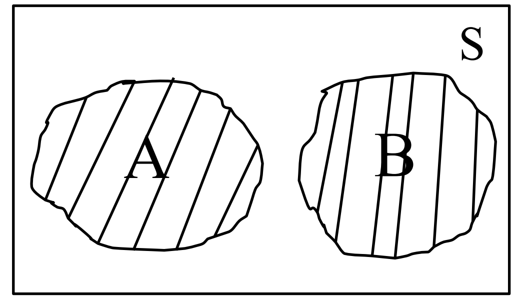
$S \,.\, A = A$

$A + \bar{A} = S$

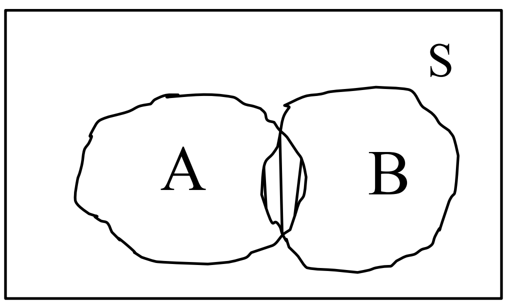
$A \,.\, \bar{A} = \overline{\emptyset}$

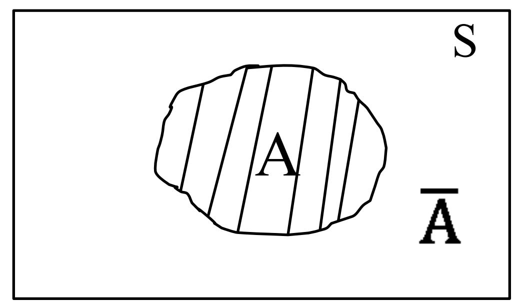
Diagrama de Venn





$A + B, A.B = \emptyset$





A.B

Leis de Morgan

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,.\overline{B}$$

$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Evento

- Evento: qualquer subconjunto de S é denominado de evento

  Exemplo: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  A = {2, 4, 6} números pares

  A = evento ou ocorrência de números pares no lançamento de um dado

- Eventos mutuamente exclusivos: é um conjunto de eventos, tal que a ocorrência de um deles torna inviável a ocorrência dos demais.

  Se A e B são mutuamente exclusivos, então

  $$A.B = A \cap B = \emptyset = \{\ \}$$

- Exemplo: As faces de um dado

Probabilidade

- Atribuição de número ao evento para saber a chance de ocorrência de um evento.
- Notação: P(A), P{A}, Pr{A}, Prob{A}
- Definição: Frequencia relativa

  Repetição de um experimento N vezes.

  Evento A ocorreu m vezes.

  $$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{m}{N} = \text{frequência relativa}$$
- Pela definição: $0 \leq P(A) \leq 1$

Axiomas de Probabilidade (1)

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Se $A \,.\, B = \emptyset$ então $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Propriedades

a) $P(\emptyset) = 0$

Prova: $A + \emptyset = A$, A e $\emptyset$ eventos mutuamente exclusivos

$P(A + \emptyset\ ) = P(A) + P(\emptyset) = P(A) \rightarrow P(\emptyset) = 0$

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Prova: $A + \overline{A} = S$ $\quad$ A e $\overline{A}$ são eventos mutuamente exclusivos

$P(A + \overline{A}) = P(S) = 1$

$P(A) + P(\ \overline{A}) = 1 \rightarrow P(\ \overline{A}) = 1 - P(A)$

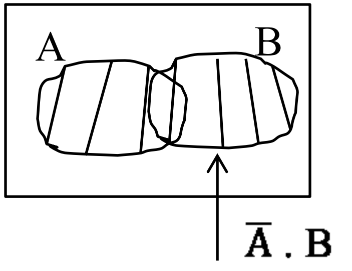
Axiomas de Probabilidade (2)

Propriedades

c) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

Prova: $A + B = A + \bar{A} . B$

A e $\bar{A} . B$ são mutuamte exclusivos



$P(A + B) = P(A) + P(\bar{A} . B)$

$\bar{A}.B + A.B = (\bar{A} + A).B = B$

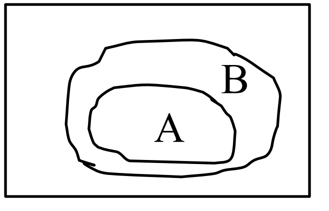
$P(\bar{A}.B) = P(B) - P(A.B)$

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

d) $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$

e) Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$

e $P(A) \leq 1$



Prova: $B = A + \bar{A}.B \rightarrow P(B) = P(A) + P(\bar{A}.B) \geq P(A)$

Espaços Amostrais Discretos

- Espaço Amostral consiste de número finito N de amostras

  Eventos com prob. $p_1, p_2, ... p_N$

  $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$

- Exemplo: Seja o lançamento de uma moeda repetidamente e a contagem de número de lançamentos necessários até que ocorra a primeira cara.

Seja A = {1ª cara em números pares de lançamentos}

$P(A) = ?$

Possibilidades: 1, 2, 3, 4, ... Lançamentos

Probabilidades: $P_1, P_2, P_3, P_4, ...$

P_i = Prob{1ª cara no i^{esimo} lançamento}, $i = 1, 2, 3, ...$

Exemplo (cont.)

$$P_1 = \frac{1}{2}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$$

$$P_i = \frac{1}{2^i}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

A = {1ª cara em números pares de lançamentos}

$$P(A) = P_2 + P_4 + P_6 + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^2}\right)^k = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Eventos Independentes

- Dois eventos, A e B, são estatisticamente independentes se

  $P(A.B) = P(A).P(B)$

- A, B, C são independentes se

  a) $P(A.B) = P(A).P(B)$

  $P(A.C) = P(A).P(C)$

  $P(B.C) = P(B).P(C)$

  b) $P(A.B.C) = P(A).P(B).P(C)$

Se A e B são independentes então $\overline{A}$ e $\overline{B}$, A e $\overline{B}$ e $\overline{A}$ e B são independentes. Prova:

$\overline{A} \,.\, \overline{B} = \overline{A + B} \rightarrow P(\overline{A} \,.\, \overline{B}) = 1 - P(A+B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A.B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B) = 1 - P(A) - P(B)[1 - P(A)] =$

$= [1 - P(A)]\ [1 - P(B)] = P\ (\overline{A}) \,.\, P(\overline{B})$

Probabilidade Condicional

- Seja B um evento, tal que P(B) > 0 então

$$P(A / B) \triangleq \frac{P(A.B)}{P(B)} \text{ é a prob. condicional de A dado B}$$

- Propriedades:

a) Se $A.B = \emptyset$ então $P(A / B) = 0$

b) Se $A \subset B$ então $P(A / B) \geq P(A)$

c) Se $B \subset A$ então $P(A / B) = 1$

d) $P(A / B)$ é um probabilidade

- A e C mutuamente exclusivos

$$P[(A + C) / B] = \frac{P(A.B)}{P(B)} + \frac{P(C.B)}{P(B)} = P(A / B) + P(C / B)$$

- Probabilidade total

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ mutuante exclusivos e $P(A_i) > 0$

Variáveis Aleatórias

- Probabilidade total (cont.)

  Sejam $A_1, ..., A_n$ mutuante exclusivos e $P(A_i) > 0$

  Com $B \subset A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ então

  $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$

- Espaços Amostrais

  Numéricos

  S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  S = { 2, 3, 4, ...,..11, 12} soma de pontos de dois dados

  Não numéricos

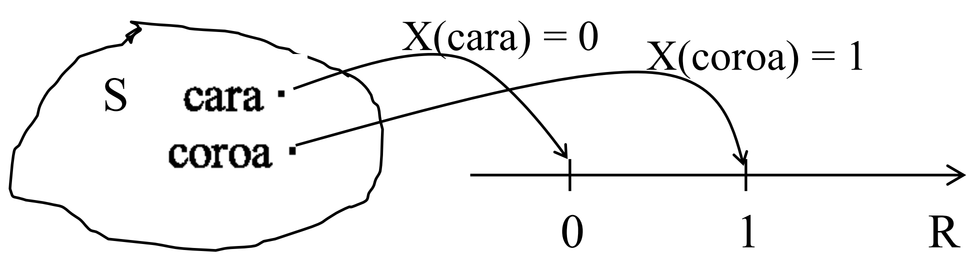
  S = {cara, coroa}

  S = {sucesso, insucesso} lançamento de um foguete

  S = {boa, defeituosa} inspeção de uma peça

Variáveis Aleatórias

- É interessante do ponto de vista da matemática, associar sempre um número ao resultado do experimento
- A variável aleatória X é uma função que atribui a cada elemento do espaço amostral um número.
- Exemplo:



- Em geral, usa-se a notação X em vez de X(s)

  X = variável aleatória

  $X : S \rightarrow R$

Variáveis Aleatórias

- Se S é um conjunto discreto então X é uma variável aleatória discreta

  $X \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$
- O conjunto S pode ser infinito, mas deve ser enumerável
- Existe uma prob. associada a cada valor de VA

  $\text{Prob}\{X = x_i\} = P_x(x_i)$
- Seja X uma VA representada da seguinte forma:

  $[X \leq x]$ com Prob $[X \leq x]$

  $[X > x]$ com Prob $[X > x] = 1 - \text{Prob}\,[X \leq x]$

  $[a < X < b]$ com Prob $[a < X < b]$

  X é uma VA continua.

Função de Distribuição

- Prob $[X \leq x]$, depende de x. Para cada valor de x temos uma prob., portanto é uma função.
- É denominada de função de distribuição de probabilidade ou função de distribuição acumulativa, representada por

  $F_x(x) = F(x) = \text{Prob}\,[X \leq x], \ -\infty < x < \infty$
- Propriedades

  a) $F_x(-\infty) = 0$, x não assume valor no intervalo $(-\infty, \infty)$

  b) $F_x(+\infty) = 1$, observar x no intervalo $(-\infty, \infty)$, que é certeza.

  c) Se $x_2 > x_1$ então $F_x(x_2) \geq F_x(x_1)$

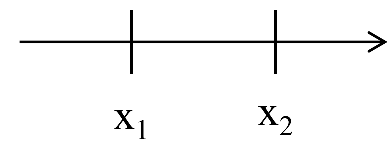
Função de Distribuição

c) Se $x_2 > x_1$ então $F_x(x_2) \geq F_x(x_1)$

Prova:

$$F_x(x_2) = \text{Prob}\{X \leq x_2\}$$

$$= \text{Prob}\{X \leq x_1 \text{ ou } x_1 < X \leq x_2\}$$



$$= \underbrace{\text{Prob}\{X \leq x_1\}}_{F_x(x_1)} + \text{Prob}\,\{x_1 < X \leq x_2\}$$

$$F_x(x_2) - F_x(x_1) = \text{Prob}\,\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$$

$$\therefore F_x(x_2) \geq F_x(x_1)$$

Densidade de Probabilidade

- Se $F_x(x)$ é diferenciável, define-se a função densidade de probabilidade $p_x(x)$

  $p_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$ e

  $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} p_x(x)dx$

- Propriedades

  a) $\text{Prob}\{x_1 < X \leq x_2\} = F_x(x_2) - F_x(x_1) =$

  $= \int_{-\infty}^{x_2} p_x(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_x(x)dx = \int_{x_2}^{x_2} p_x(x)dx$

No caso limite: $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$ e $\Delta x \to 0$

$\text{Prob}\{x < X \leq \Delta x\} = \int_{x}^{\Delta x} p_x(x)dx = p_x(x)\Delta x$

Prob de x estar no intervalo Δx

Médias Estatísticas

b) $F_x(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)dx = 1$

c) $F_x(-\infty) = 0$

d) $p_x(x) \geq 0$

- Médias Estatísticas

Seja X uma VA discreta, então

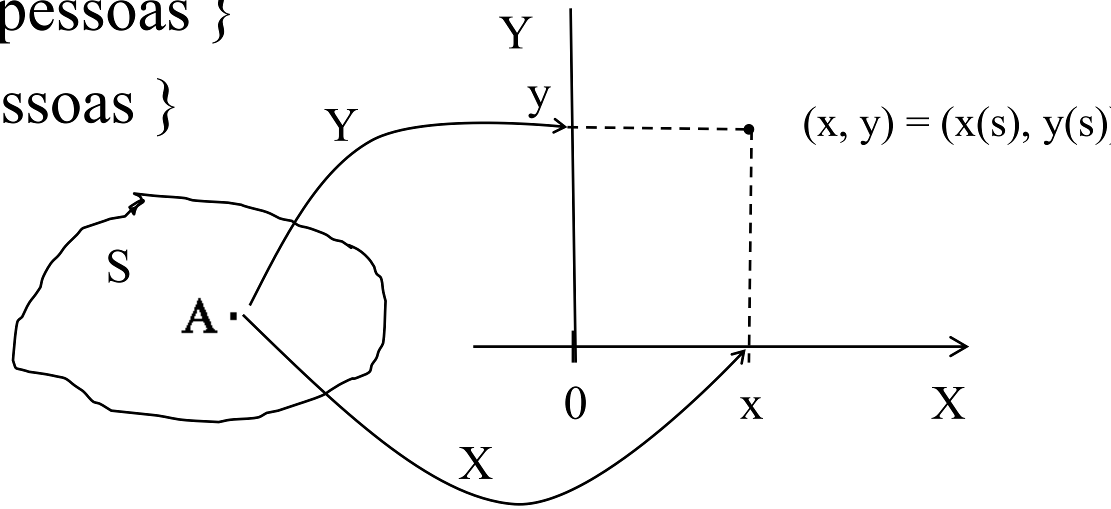
$\overline{X} = E\{X\} = E_X\{x\} = \sum_{i=1}^{n} x_i.\text{Prob}\{X=x_i\}$ = valor médio = média = valor esperado = esperança matemática

Se X é uma VA contínua, então

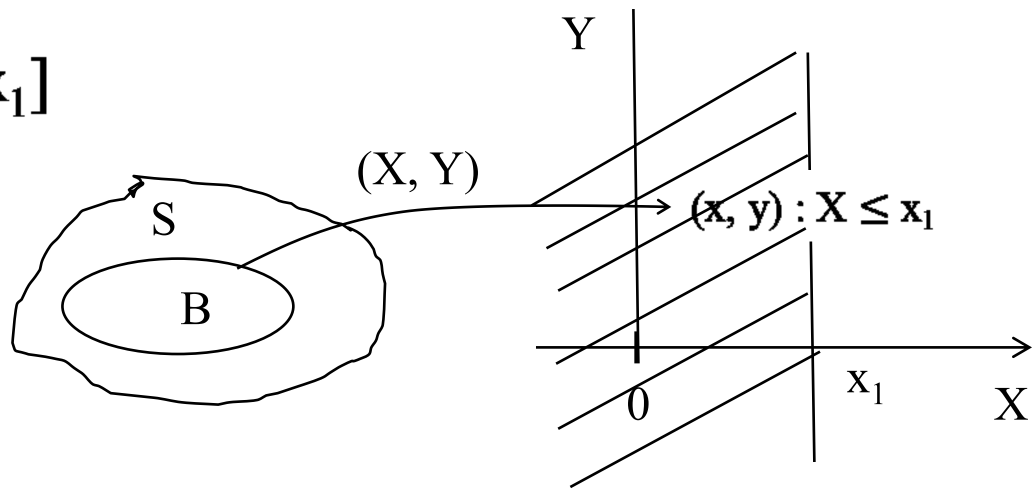
$$\overline{X} = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, p_x(x)dx$$

Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- $X = \{$ alturas das pessoas $\}$
- $Y = \{$ peso das pessoas $\}$

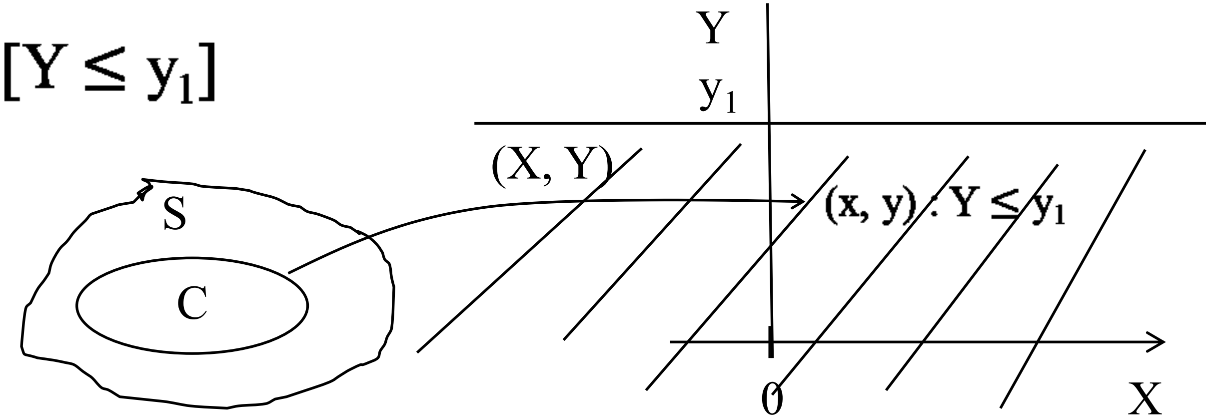


- **Evento $[X \leq x_1]$**

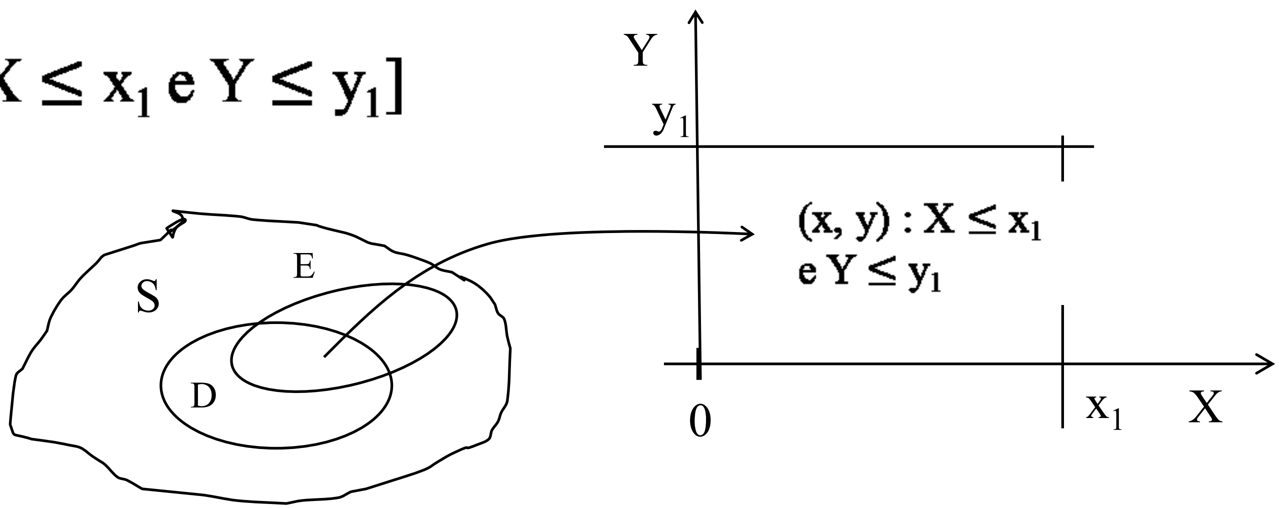


Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- Evento $[Y \leq y_1]$



- Evento $[X \leq x_1 \text{ e } Y \leq y_1]$



Função de Distribuição Conjunta

$F_x(x) = \text{Prob}\ \{X \le x\}$

$F_Y(y) = \text{Prob}\ \{Y \le y\}$

$F_{XY}(x,y) = \text{Prob}\ \{X \le x \text{ e } Y \le y\} = \text{Prob}\ \{X \le x\ ,\ Y \le y\}$

X e Y são independentes se todos os x e y são independentes.

$F_{XY}(x,y) = F_x(x) \cdot F_Y(y)$

- Propriedades

a) $0 \le F_{XY}(x,y) \le 1$

b) Se $x_1 \le x_2$ e $y_2 \le y_1$ então

$F_{XY}(x_1,y_1) \le F_{XY}(x_2,y_2)$

c) Se $x_2 > x_1$ então $F_x(x_2) \ge F_x(x_1)$

Função de Distribuição Conjunta (cont.)

c) $\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F_{XY}(x,y) = F_{XY}(\infty,\infty) = 1$

$\lim_{x\to-\infty} F_{XY}(x,y) = F_{XY}(-\infty,\ y) = 0$

$\lim_{y\to-\infty} F_{XY}(x,y) = F_{XY}(x,-\infty) = 0$

d) $\lim_{x\to a+} F_{XY}(x,y) = F_{XY}(a,\ y)$

$\lim_{y\to a+} F_{XY}(x,y) = F_{XY}(x,a)$

e) Se a ≤ b e c ≤ d então

$F_{XY}(a,c)$ - $F_{XY}(a,d)$ - $F_{XY}(b,c) + F_{XY}(b,d) \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} F_{XY}(x,\infty) &= F_X(x) \\ F_{XY}(\infty,y) &= F_Y(y) \end{aligned}\right\} \text{Distribuições Marginais}$$

Função de Densidade de Probabilidade Conjunta

$$p_{XY}(x,y) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$$

e

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p_{XY}(x,y)\, dy dx$$

Propriedades

a) $p_{XY}(x,y) \geq 0$ para todo x, y

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\, dy dx = 1$

c) $p_{XY}(x,y)$ é continuo