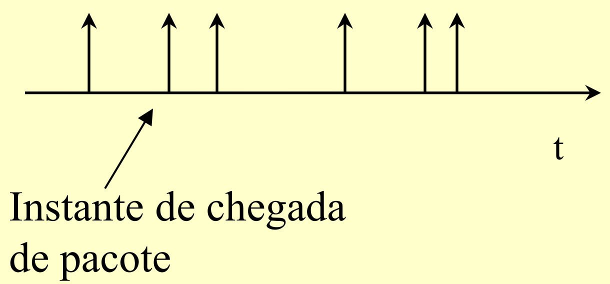
Desempenho de Acessos Múltiplos

Prof. Dr. S. Motoyama

Processo de chegada: Poisson



O processo de chegada poissoniano pode ser escrito como

$$\Pr\{Y = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

A média é dada por

$$\bar{y} = \lambda t$$

E a variância é dada por

$$\sigma_Y^2 = \lambda t$$

Y = variável aleatória que indica
a quantidade de pacotes que
chega em um intervalo de tempo t
k = é um valor particular de Y
λ = taxa média de chegada
de pacotes

Propriedades do Processo de Poisson

1- A soma de variáveis aleatórias poissonianas independentes é uma poissoniana.

Considere a variável aleatoria $Y = Y_1 + Y_2$, onde

Y_1 e Y_2 são poissons de médias λ_1 e λ_2, respectivamente.

Assim

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\Pr\{Y = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

Poisson (cont.)

2 - Uma das características marcantes da Poisson é que a ocorrências de eventos simultâneos tem probabilidade nula.

$$\Pr\{Y = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

Analisando para $t = \Delta t \to 0$, e retendo os termos de primeira ordem na serie de Taylor

$$\text{Note que } \exp(-\lambda t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-\lambda t)^k}{k!} = 1 - \lambda t - \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\Pr\{Y = 0\} = 1 - \lambda \Delta t, \quad \Pr\{Y = 1\} = \lambda \Delta t$$

$$\Pr\{Y \geq 2\} = 0$$

Para Δt infinitesimal há apenas

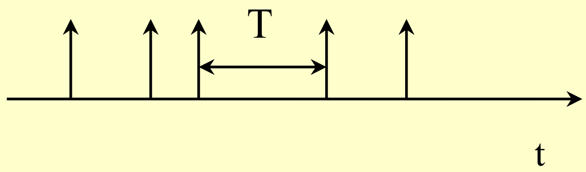
- uma ocorrência com probabilidade $\lambda \Delta$t
- ou nenhuma ocorrência com probabilidade 1 - $\lambda \Delta$t

Em outras palavras:
Em processos poissonianos não há ocorrências simultâneas.

Variável Exponencial Negativa

Seja Y uma variável aleatória discreta de Poisson representando o número de ocorrências num dado intervalo de observação.

Qual é a distribuição da variável aleatória T que representa o tempo entre ocorrências sucessivas?



Notação: $F_T(t)$ = Pr{T< t} é a função distribuição de probabilidade, cuja derivada é a função densidade de probabilidade, denotada por $p_T(t)$.

Pr{T>t} = Pr{Y = 0 em t} probabilidade de não haver ocorrência em intervalo t

$$Pr\{T > t\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} exp(-\lambda t) = exp(-\lambda t)$$

$$F_T(t) = 1 - Pr\{T > t\} = 1 - exp(-\lambda t);\ t \geq 0$$

Derivando, obtem - se

$$p_T(t) = \lambda\, exp(-\lambda t);\ t \geq 0$$

Média e Variância da Exponencial Negativa

$$p_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

$$E\{T\} = \int_0^\infty t p_T(t) dt = \int_0^\infty t\lambda \exp(-\lambda t) dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t'}{\lambda} \lambda \exp(t') \frac{dt'}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty t' \exp(t') dt'$$

$$\int_0^\infty x^n \exp(-ax) dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} = \frac{n!}{(-1)^2} = 1$$

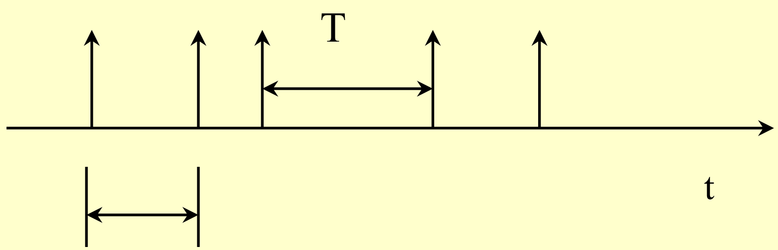
Portanto,

$$E\{T\} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E\{T^2\} = \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{e} \quad \sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Processo de Atendimento

O processo de atendimento pode ser caracterizado, de maneira análoga ao processo de chegada. Basta, neste caso, olhar a saída e verificar o tempo entre as partidas, que pode ser modelado como exponencial negativa.



Duração de um atendimento ou transmissão de um pacote

$$F_T(t) = 1 - \exp(-\mu t);\ t \geq 0$$

$$\mathrm{p}_{\mathrm{T}}(t) = \mu \exp(-\mu t);\ \ t \geq 0$$

onde $t_m = 1/\mu$ é o tempo médio de atendimento e μ é a taxa média de término de atendimento.

Exercícios - Poisson

1 Seja uma fila em que as chegadas dos pacotes obedecem a uma distribuição poissoniana com uma taxa de 0,5 chamadas/min.

a) Qual é a probabilidade de 0 chegadas em um intervalo de 5 minutos?

b) Qual é a probabilidade de 2 chegadas em um intervalo de 5 minutos?

2 Seja uma fila em que os terminais de dados são divididos em dois conjuntos. Um conjunto gera chamadas obedecendo a uma distribuição poissoniana de taxa 1 chamada/seg. O outro comjunto gera chamadas obedecendo a uma distribuição exponencial negativa com média igual a 4 segundos.

a) Qual é a probabilidade de que em um intervalo de 2 segundos não haja nenhum pacote chegando à fila?

Análise da Vazão do Aloha

Suposições:

1) P (segundos) = tempo médio de transmissão de um pacote (tempo máximo de propagação no cabo + tempo para transmitir todos os bits de pacote)

2) A chegada dos pacotes (novas chegadas e os pacotes de retransmissão) obedece a uma distribuição poissoniana.

Sejam

S = vazão = número médio de pacotes transmitidos com sucesso por tempo de transmissão de pacote P.

G = tráfego oferecido = número médio de tentativas de transmissão de pacotes por tempo de transmissão de pacote P.

Observa-se que para haver uma transmissão de um pacote bem sucedido deve haver um intervalo mínimo de tempo igual a 2P.

Análise da Vazão (cont.)

Assim,

S = G . Pr {transmissão bem sucedida}

Mas,

Pr {transmissão bem sucedida} = Pr{nenhuma transm. no intervalo 2P} =

= Pr {zero chegadas em 2P}

$$\Pr\left\{k\ chegadas\ em\ t\ seg.\right\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t)$$

$\lambda =$ taxa média (total) de pacotes por segundo

G = número médio de pacotes / P (seg.)

Portanto,

G/P = número médio de pacotes / seg = λ

Pr {0 chegadas em 2P} = exp (- (G/P)(2P)) = exp (- 2G)

Portanto,

S = G exp (- 2G)

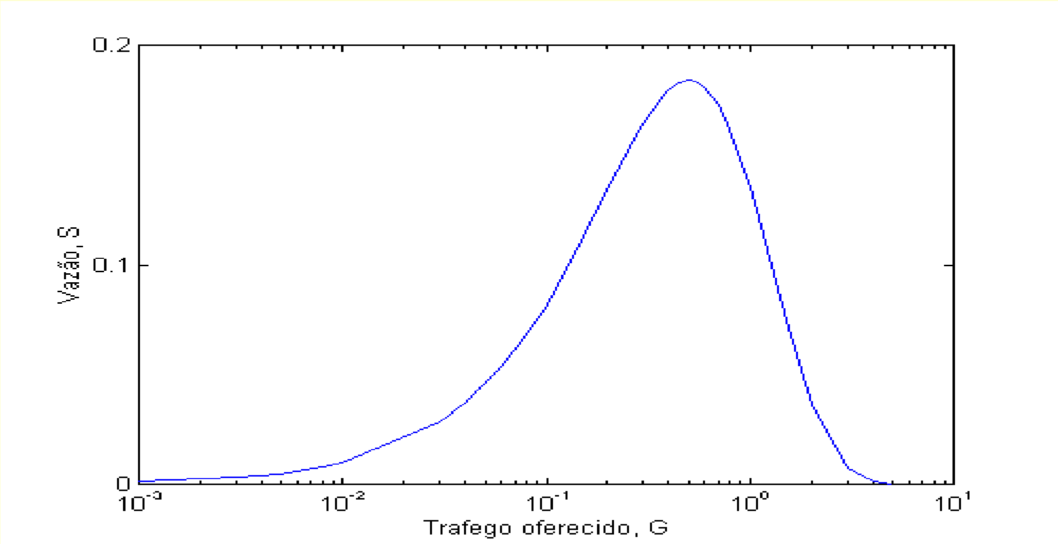
Vazão (cont.)

Valor máximo da vazão

$$\frac{dS}{dG} = \exp(-2G) + G\exp(-2G)(-2) = 0$$

$$1 - 2G = 0 \Rightarrow G = 0{,}5$$

$$G = 0{,}5 \Rightarrow S = 0{,}5\exp(-1) = \frac{1}{2e} = 0{,}184$$



Para G > 0.5, o aumento de G ocasiona a diminuição de S. Há aumento de colisões e diminuição de transmissão com sucesso.
A vazão tende a zero, significando que não há transm. bem sucedida, somente colisões. Não é uma operação estável.

Slotted Aloha

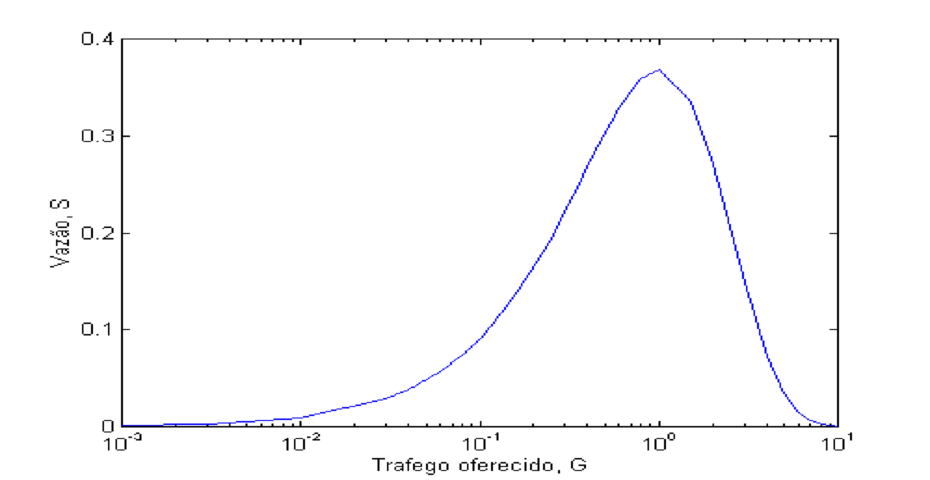
Neste caso o intervalo de tempo para não haver colisão é P.
Pr { 0 chegadas em P } = exp (- G)
Portanto,

S = G exp (- G)

$$\frac{dS}{dG} = \exp(-G) - G\exp(-G) = 0$$

$$G = 1$$

$$G = 1 \Rightarrow S_{max} = \exp(-1) = \frac{1}{e} = 0{,}368$$



Vazão para CSMA não persistente

A vazão é dada por

$$S = \frac{G\exp(-aG)}{G(1+2a)+\exp(-aG)}$$

G é o tráfego total de pacotes por tempo médio de transmissão de um pacote P, em segundos.

$a = \frac{\tau}{P}$,

τ atraso máximo de propagação em um sentido de transmissão.

$$a = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

$$S = \frac{G}{1+G}$$

G grande $\Rightarrow$ $1+G \cong G$ $\Rightarrow S = 1$

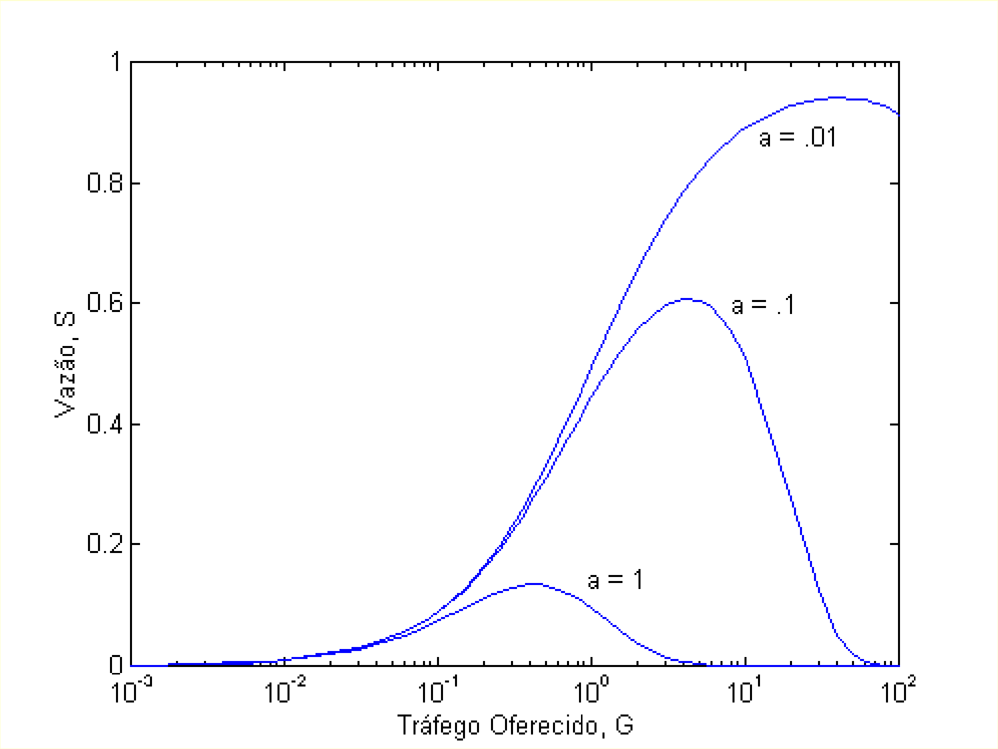
Vazão para CSMA/CD Não - persistente

A vazão é dada por

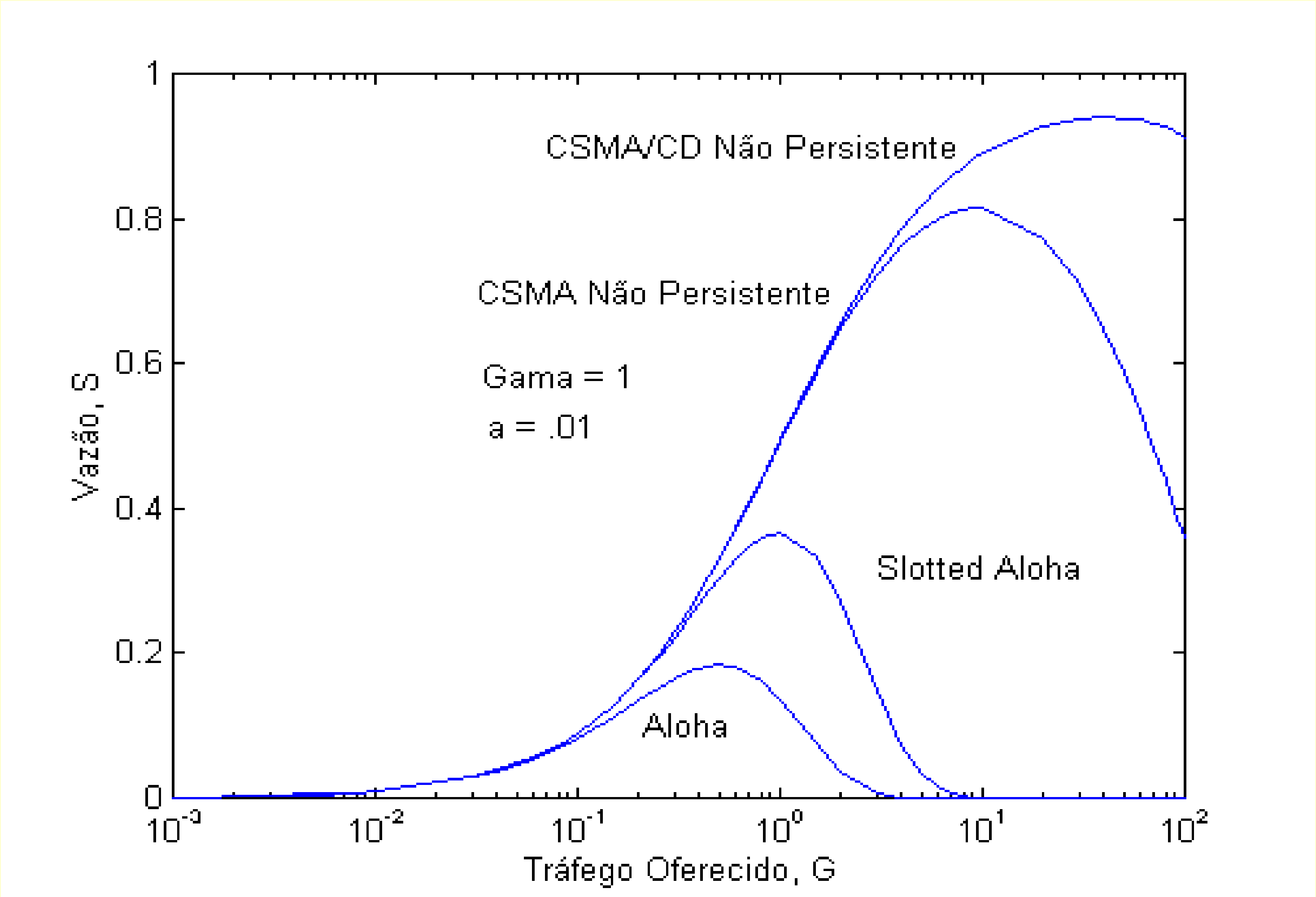
$$S = \frac{G\exp(-aG)}{G\exp(-aG) + \gamma aG[1-\exp(-aG)] + 2aG[1-\exp(-aG)] + [2-\exp(-aG)]}$$

$$\gamma = \frac{J}{\tau} \quad , \; a = \frac{\tau}{P}$$

Vazão versus Tráfego para CSMA/CD não Persistente, $\gamma = 1$



Comparação dos Esquemas de Acesso para Estrutura em Barramento



Exercício

6.3. Seja uma rede em barramento com M terminais. Cada um dos terminais possui um buffer de tamanho infinito e com chegadas poissonianas com taxa média = 0,5 pacotes/seg. O comprimento médio do pacote é 1000 bits. A capacidade do canal C = 20 Kbits/seg. Supondo os esquemas de acesso Aloha puro e slotted Aloha,

a) Calcule para cada esquema de acesso, o máximo valor de M

Supondo que o barramento tenha um comprimento de 1 km e que a velocidade de propagação no barramento seja 2×10^5 m/s.

b) Calcular as vazões para CSMA não persistente, considerando os valores encontrados em a).