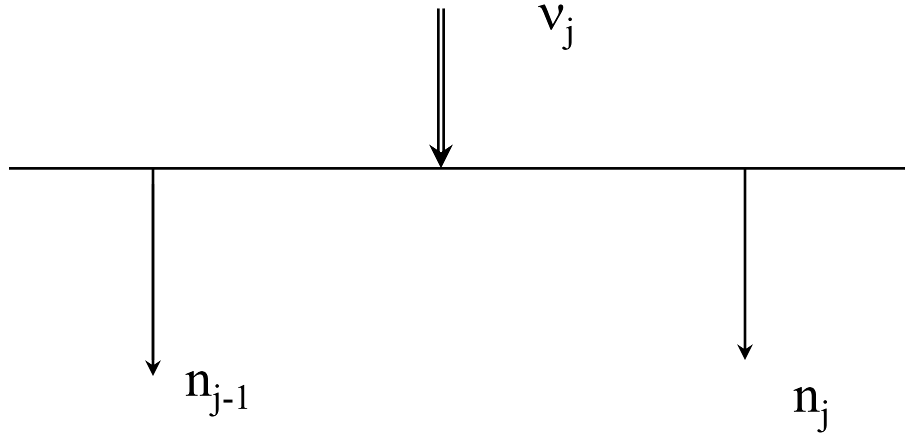
Fila M/G/1

Prof.: S. Motoyama

Aula 8

Fila M/G/1 Distribuição Geral do Tempo de Serviço

Não é markoviano, mas pode-se caracterizar instantes de partidas para obter o que é denominado cadeia de Markov escondida.



j é o instante de partida
n_j = tamanho do buffer após o instante j de partida
ν_j = número de pacotes que chegaram durante o serviço do pacote que partiu no instante j.

$$\begin{cases} n_j = n_{j-1} - 1 + \nu_j & , \quad n_{j-1} > 0 \\ n_j = \nu_j & , \quad n_{j-1} = 0 \end{cases}$$

Fila M/G/1

Seja a função

$$u(n_{j-1}) = \begin{cases} 1 & n_{j-1} > 0 \\ 0 & n_{j-1} = 0 \end{cases}$$

Então

$$n_j = n_{j-1} - u(n_{j-1}) + \nu_j$$

$$n_j^{\,2} = n_{j-1}^{\,2} - u^2(n_{j-1}) + \nu_j^{\,2} - 2n_{j-1}u(n_{j-1}) + \\ + 2n_{j-1}\nu_j - 2u(n_{j-1})\nu_j$$

$$E\{n_j^{\,2}\} = E\{n_{j-1}^{\,2}\} + E\{u^2(n_{j-1})\} + E\{\nu_j^{\,2}\} - \\ - 2E\{n_{j-1}u(n_{j-1})\} + 2E\{n_{j-1}\nu_j\} - 2E\{u(n_{j-1})\nu_j\}$$

$j \rightarrow \infty \qquad \Rightarrow \qquad$ Equilíbrio estatístico

$$E\{n^2\} = E\{n^2\} + E\{u^2(n)\} + E\{\nu^2\} - \\ - 2E\{nu(n)\} + 2E\{n\nu\} - 2E\{u(n)\nu\}$$

Fila M/G/1

$$0 = E\{u^2(n)\} + E\{\nu^2\} - 2E\{nu(n)\} + 2E\{n\nu\} - 2E\{u(n)\nu\}$$

Cálculo de cada termo

a) $u^2(n) = u(n)$

$$E\{u(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) = P(ocupado)$$

Seja um intervalo de tempo I. O tempo do servidor ocupado será:

I - I p_0, onde p_0 = prob. de estar vazio

O número de pacotes atendidos será:

(I - I p_o) / (1/ μ) = I (1 - p_0) μ , onde (1 / μ) = tempo médio de serviço

Fila M/G/1

Total de pacotes que chegaram em I: λ I

Portanto,

$\lambda I = I\,(1 - p_0)\;\mu$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1 - p_0 \Rightarrow \rho = 1 - p_0 = E\{u(n)\}$$

B) $2\,E\,\{n\,u(n)\} = 2\,E\,\{n\}$

C) $2\,E\,\{u(n)\;\nu\} = 2\,E\,\{u(n)\}.E\,\{\nu\}$, *supondo independência*

Entretanto

$$n_j = n_{j-1} - u(n_{j-1}) + \upsilon_j$$
$$E\{n\} = E\{n\} - E\{u(n)\} + E\{\upsilon\}$$
$$E\{\upsilon\} = E\{u(n)\} = \rho$$
$$2E\{u(n)\upsilon\} = 2E\{u(n)\}.E\{\upsilon\} = 2\rho\rho = 2\rho^2$$

Fila M/G/1

$$d)\quad 2E\{n\upsilon\} = 2E\{n\}.E\{\upsilon\}$$
$$2E\{n\upsilon\} = 2E\{n\}.\rho$$

Substituindo:

$$0 = \rho + E\{\upsilon^2\} + 2E(n)\rho - 2E\{n) - 2\rho^2$$
$$2E\{n\}[1-\rho] = \rho + E\{\upsilon^2\} - 2\rho^2$$
$$E\{n\} = \frac{\rho + E\{\upsilon^2\} - 2\rho^2}{2[1-\rho]}$$

Fila M/G/1

Cálculo de $E\{v^2\}$

$$G_\upsilon(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \,\Pr\{\upsilon = k\}$$

$$\Pr\{\upsilon = k\} = \int_0^\infty \Pr\{\upsilon = k \,/\, r = t\}\,.f_r(t)dt$$

Onde $f_r(t)$ é a densidade de probabilidade de tempo de serviço.

Para chegadas poissonianas

$$\Pr\{\upsilon = k \,/\, r = t\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t)$$

Substituindo as probabilidades e invertendo a ordem da somátoria com a integral, obtemos

Fila M/G/1

$$G_\upsilon(z) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) f_r(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda tz)^k}{k!} dt$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda tz)^k}{k!} = \exp(\lambda tz)$$

$$\therefore$$

$$G_\upsilon(z) = \int_0^\infty \exp[-\lambda t(1-z)] f_r(t) dt$$

$$= F(\mathrm{s})\Big|_{\mathrm{s}=\lambda(1\text{-z})} = F[\lambda(1-z)]$$

$onde$

$$F(s) = \int_0^\infty \exp(-st).f_r(t)dt = \text{transformada de Laplace}$$

$Assim,$

$$G_\upsilon(z) = F[\lambda(1-z)]$$

Para uma determinada distribuição de tempo de serviço é possível determinar $G_\nu(z)$

Fila M/G/1

$$G_\upsilon(z) = F[\lambda(1-z)]$$

$$G_\upsilon^{(1)}(z) = \frac{d}{dz}F[\lambda(1-z)] = \frac{d}{ds}F(s)\Big|_{s=\lambda(1-z)}.(-\lambda)$$

$$z = 1 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow G_\upsilon^{(1)}(1) = F^{(1)}(0).(-\lambda)$$

$$F^{(1)}(0) = -E\{r\} = \frac{1}{\mu}$$

$$G_\upsilon^{(1)}(1) = -E\{r\}.(-\lambda) = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

$$E\{\upsilon\} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

Fila M/G/1

$$G_{\upsilon}^{(2)}(1) = E\{\upsilon^2\} - E\{\upsilon\}$$

$$G_{\upsilon}^{(2)}(z) = \frac{d^2}{ds^2} F(s)\Big|_{s=\lambda(1-z)} .(-\lambda)^2$$

$$G_{\upsilon}^{(2)}(1) = F^{(2)}(0).\lambda^2 = E\{r^2\}.\lambda^2$$

$$E\{\upsilon^2\} = \lambda^2 E\{r^2\} + \lambda E\{r\}$$

$$Mas,$$

$$\sigma^2 = E\{r^2\} - E\{r\}^2 \Rightarrow E\{r^2\} = \sigma^2 + E\{r\}^2$$

$$Logo$$

$$E\{\upsilon^2\} = \lambda^2[\sigma^2 + (E\{r\}^2] + \lambda E\{r\}, \qquad E\{r\} = \frac{1}{\mu}$$

$$\therefore \quad E\{\upsilon^2\} = \lambda^2\sigma^2 + \rho^2 + \rho$$

Fila M/G/1

Substituindo:

$$E\{n\} = \frac{\rho + E\{\upsilon^2\} - 2\rho^2}{2[1-\rho]} =$$

$$= \frac{\rho + \lambda^2\sigma^2 + \rho^2 + \rho - 2\rho^2}{2[1-\rho]}$$

$$E\{n\} = \frac{2\rho - \rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2[1-\rho]}$$

$$E\{n\} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2[1-\rho]} = \frac{\rho}{1-\rho}[1 - \frac{\rho}{2}(1 - \mu^2\sigma^2)]$$

Fila M/G/1

Fórmula final

$$E\{n\} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho}[1 - \frac{\rho}{2}(1 - \mu^2\sigma^2)]$$

Exemplos de Aplicação

a) Caso exponencial

b(r) = μ exp (- μ r)

$$E\{r\} = \frac{1}{\mu} \quad e \quad \sigma^2 = \frac{1}{\mu^2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \mu^2\sigma^2 = 0$$

$$E\{n\} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$E\{T\} = \frac{E\{n\}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

b) Para pacotes de tamanho fixo

$$E\{r\} = \frac{1}{\mu} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = 0$$

$$E\{n\} = \frac{\rho}{1-\rho}[1 - \frac{\rho}{2}]$$

Menor que no caso M / M / 1

Exercícios

1. Seja um concentrador com chegada de pacotes poissonianos de taxa 3 pacotes/seg. e com pacotes de tamanho fixo igual a 10 bits. A capacidade C da linha é de 120 bits/seg.

   a) Supondo uma fila infinita, determine o número e o tempo médio de permanência dos pacotes no concentrador.

   b) Compare com a fila M/M/1 (λ= 3 pacotes/seg., (1/ μ) = 10 bits)

2 Seja um concentrador com chegada de pacotes poissonianos de taxa 3 pacotes/seg. e com pacotes de tamanho obedecendo a uma distribuição geométrica de média a 10 bits. A capacidade C da linha é de 120 bits/seg.

   a) Supondo uma fila infinita, determine o número e o tempo médio de permanência dos pacotes no concentrador.

   b) Compare com a fila M/M/1 (λ= 3 pacotes/seg., (1/ μ) = 10 bits).

Exercício

3. Seja uma fila com um servidor (exponencial com $\mu = 1$ cliente/seg) e que o atendimento seja feito de dois em dois clientes se existirem mais de um cliente na fila. Se houver 1 cliente sendo atendido e chegar um outro, este não espera e é atendido simultaneamente com o primeiro. As chegadas são poissonianas com taxa $\lambda = 1$ cliente/min.

O local de espera é limitado e permite somente três clientes no sistema. Calcule:

a) O número médio de mensagens.

b) O tempo médio de espera.

c) A probabilidade do servidor estar desocupado.