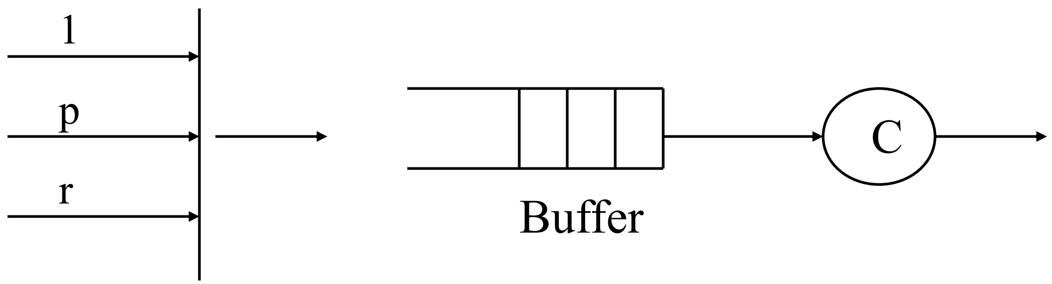
Fila de Multi-Usuários Sem e Com Prioridade

Prof.: S. Motoyama

Fila de Multi-Usuários Sem Prioridade

- Atendimento sem prioridade (tipo FIFO - first-in first-out)
- Buffer infinito
- r usuários poissonianos com taxas $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$



Se o serviço tiver a mesma distribuição para todos os usuários, então trata-se de uma fila M / G / 1 como

$$\lambda = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k ; \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

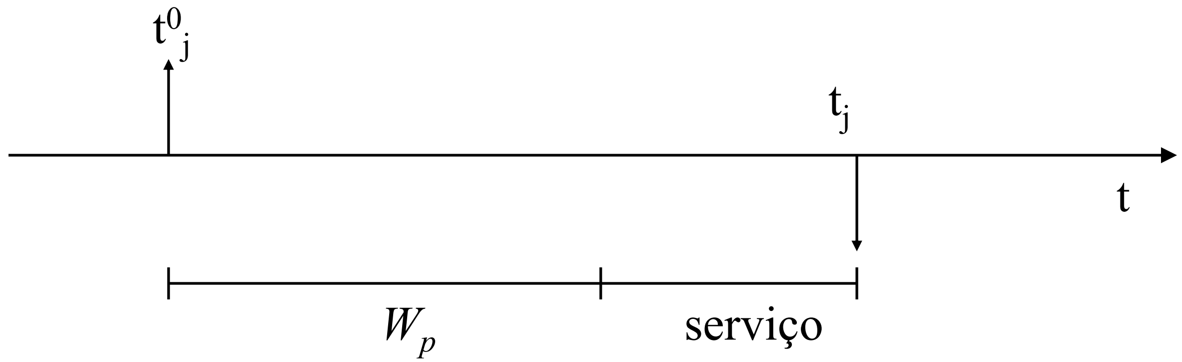
Fórmula de Pollaczek - Khinchine

$$E\{W\} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{(1+\mu^2\sigma^2)}{2}$$

Fila de Multi-Usuários Sem Prioridade

Serviços com Distribuições Distintas de Duração

$$\frac{1}{\mu_1} \cdots \frac{1}{\mu_r}$$ Médias de serviços



Esquema FIFO ⟶ $$E\{W_p\} = E\{W\}\,;\, p = 1,2,\ldots,r$$

$$W_p = T_0 + T_k$$

$$E\{W_p\} = E\{T_0\} + \sum_{k=1}^{r} E\{T_k\}$$

T_0 = tempo residual de atendimento quando da chegada de uma mensagem.
T_k = tempo para atender todas as mensagens do tipo k que esperavam no buffer no instante t^0_j.

Fila de Multi-Usuários Sem Prioridade

M_k = número de mensagens do tipo k em espera no instante t^0_j;

$$E\{T_k\} = E\{M_k\}\frac{1}{\mu_k}$$

$E\{M_k\}$ mensagens do tipo k permanecem na fila $E\{W_k\}$ unidades de tempo.
Pelo teorema de Little, tem-se $E\{M_k\} = \lambda_k E\{W_k\}$

Resultando $$E\{T_k\} = \rho_k E\{W_k\}; \quad \rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k}$$

Retomando, tem-se

$$E\{W_p\} = E\{T_0\} + \sum_{k=1}^{r} E\{T_k\}$$

$$E\{W_p\} = E\{T_0\} + \sum_{k=1}^{r} \rho_k E\{W_k\}$$

Mas, para esquema de acesso FIFO,

$$E\{W_p\} = E\{W_k\} = E\{W\}$$

Resultando em

$$\boxed{E\{W\} = \frac{1}{(1-\rho)} E\{T_0\}, \quad \rho = \sum_{k=1}^{r} \rho_k}$$

Determinação de $E\{T_0\}$

Para uma fila sem prioridade do tipo M / G / 1

$$E\{W\} = E\{T\} - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{1}{(1-\rho)}[1 - \frac{\rho}{2}(1-\mu^2\sigma^2)] - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{1}{(1-\rho)}[1+\mu^2\sigma^2)]\frac{\rho}{2}$$

Mas, $\sigma^2 = E\{R^2\} - E\{R\}^2 = E\{R^2\} - \frac{1}{\mu^2}$

Portanto, $E\{R^2\} = \frac{\sigma^2\mu^2 + 1}{\mu^2}$ e

$$E\{W\} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{(1-\rho)}E\{R^2\}\mu^2\frac{\rho}{2} = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{(1-\rho)}E\{R^2\}$$

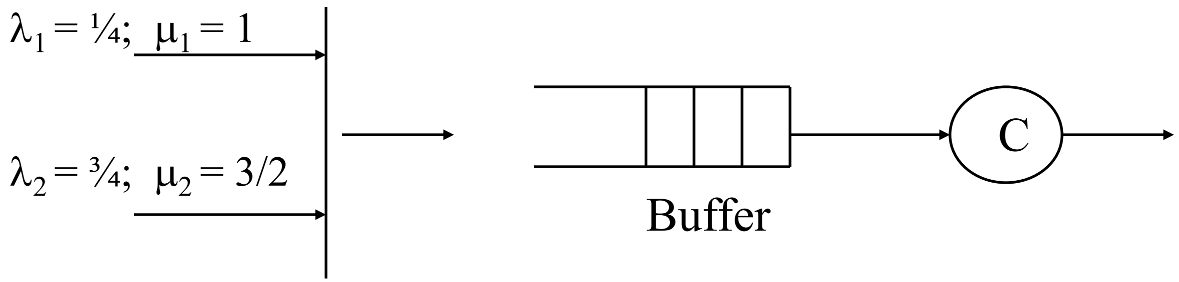
Igualando, $\frac{1}{(1-\rho)}E\{T_0\} = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{(1-\rho)}E\{R^2\}$

$$E\{T_0\} = \frac{\lambda}{2}E\{R^2\}$$

Para k tipos de mensagens,

$$\boxed{E\{T_0\} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\lambda_k E\{R_k^2\}}$$

Exemplo 1: r = 2, durações exponenciais



$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = 0{,}25 \quad ; \qquad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0{,}50$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0{,}75 < 1$$ Condição de estacionaridade

$$E\{R_1^2\} = \frac{1}{\mu_1^2} + \sigma_1^2 = \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_1^2} = \frac{2}{\mu_1^2} = 2$$

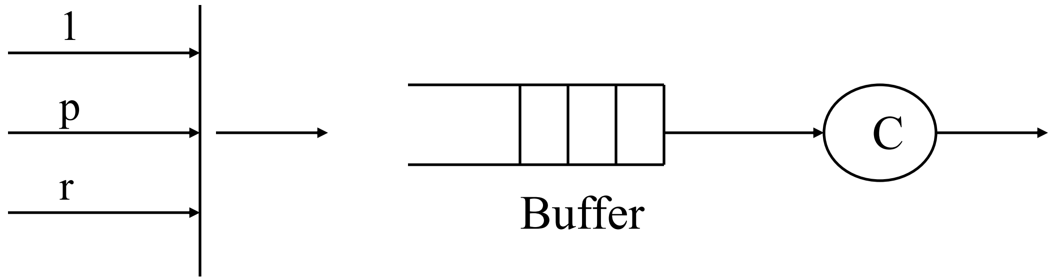
$$E\{R_2^2\} = 0{,}889$$

$$E\{T_0\} = \frac{1}{2}[0{,}25 \times 2 + 0{,}75 \times 0{,}889 = 0{,}583$$

$$E\{W\} = \frac{E\{T_0\}}{(1-\rho)} = \frac{0{,}583}{1-0{,}75} = 2{,}33$$

Filas com Prioridade e sem Preempção

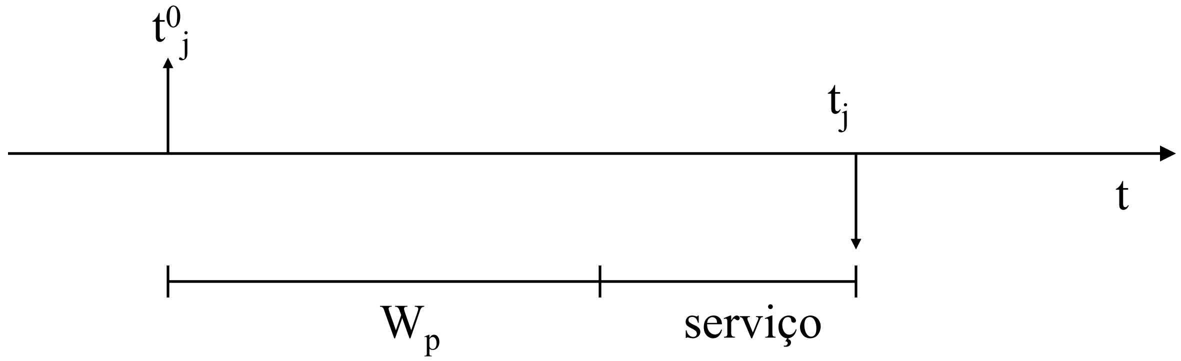
Preempção = Interrupção de serviço em andamento



Suposições:

- Esquema de acesso prioritário sem preempção. 1 é a mensagem mais prioritária, r é a menos.
- Buffer infinito.
- r mensagens poissonianos com taxas $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.
- Distribuições quaisquer dos serviços.
- Mensagens de mesma prioridade são atendidas na ordem de chegada, isto é, no esquema FIFO.

Filas com Prioridade e sem Preempção



$$W_p = T_0 + \sum_{k=1}^{p} T_k + \sum_{k=1}^{p-1} T_k'$$

T_0 = Tempo residual de atendimento quando da chegada de uma mensagem.

T_k = Tempo para atendimento das mensagens que já estavam na fila, de prioridade p ou de maior prioridade.

T'_k = Tempo para atendimento das mensagens de prioridade maior do que p, que chegaram na fila durante a espera W_p

$$E\{W_p\} = E\{T_0\} + \sum_{k=1}^{p} E\{T_k\} + \sum_{k=1}^{p-1} E\{T_k'\}$$

Filas com Prioridade e sem Preempção

Seja M_k = número de mensagens do tipo k em espera no instante t^0_j.

$$E\{T_k\} = E\{M_k\}\frac{1}{\mu_k}$$

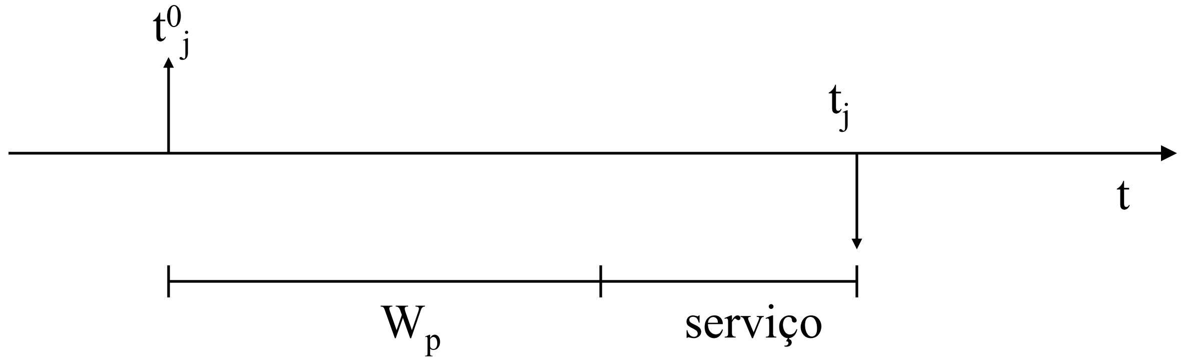
$E\{M_k\}$ mensagens do tipo k permanecem na fila $E\{W_k\}$ unidades de tempo.
Pelo teorema de Little, tem-se $E\{M_k\} = \lambda_k E\{W_k\}$
Resultando em $E\{T_k\} = \rho_k E\{W_k\}$

M'_k = número de mensagens do tipo k que chegaram durante a espera W_p e passaram na frente

$$E\{T'_k\} = E\{M'_k\}\frac{1}{\mu_k}$$

Pelo teorema de Little, tem-se $E\{M'_k\} = \lambda_k E\{W_p\}$
Resultando em $E\{T'_k\} = \rho_k E\{W_p\}$

Filas com Prioridade e sem Preempção



Retomando,

$$E\{W_p\} = E\{T_0\} + \sum_{k=1}^{p} E\{T_k\} + \sum_{k=1}^{p-1} E\{T_k^{'}\}$$

$$E\{T_k\} = \rho_k E\{W_k\} \quad ; \quad E\{T_k^{'}\} = \rho_k E\{W_p\}$$

Resulta em $$E\{W_p\} = E\{T_0\} + \sum_{k=1}^{p} \rho_k E\{W_k\} + \sum_{k=1}^{p-1} \rho_k E\{W_p\}$$

Note que este é um sistema linear de equações.
Definindo-se

$$\sigma_0 = 0,\ \sigma_1 = \rho_1,\ \sigma_2 = \rho_1 + \rho_2,\ \ldots,\ \sigma_r = \rho$$

Tem-se,

$$E\{W_p\}(1 - \sigma_{p-1}) = E\{T_0\} + \sum_{k=1}^{p} \rho_k E\{W_k\}$$

$$p = 1,2,\ldots,r$$

Filas com Prioridade e sem Preempção

Resultando em:

$$E\{W_1\} = \frac{E\{T_0\}}{1-\rho_1}$$

$$E\{W_p\} = \frac{E\{T_0\}}{(1-\sigma_{p-1})(1-\sigma_p)} \qquad p = 2,\ldots,r$$

$$E\{W_r\} = \frac{E\{T_0\}}{(1-\sigma_{r-1})(1-\rho)}$$

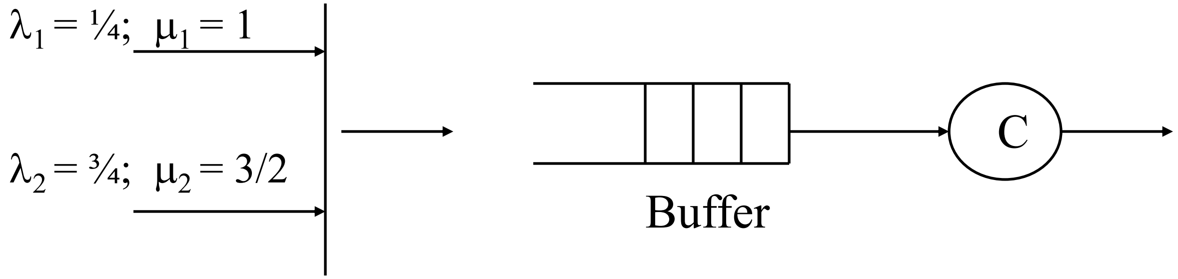
Com

$$E\{T_0\} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\lambda_k E\{R_k^2\}$$

Pois T_0 não é afetado pelo esquema de prioridade de acesso.

Exemplo 2

Considere o exemplo anterior com serviços exponenciais e o terminal 1 é de maior prioridade.



$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = 0{,}25 \quad ; \qquad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0{,}50$$

$$E\{W_1\} = \frac{E\{T_0\}}{1-\rho_1}$$

$$E\{T_0\} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r} \lambda_k E\{R_k^2\}$$

$$E\{T_0\} = 0{,}583$$

$$E\{W_1\} = \frac{E\{T_0\}}{1-\rho_1} = \frac{0{,}583}{1-0{,}25} = 0{,}777 \ \text{seg.}$$

$$E\{W_2\} = \frac{E\{T_0\}}{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)} = \frac{0{,}583}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)} = \frac{0{,}583}{0{,}75.0{,}25} = 3{,}1 \,\text{seg.}$$

Sem prioridade

$$E\{W\} = \frac{E\{T_0\}}{(1-\rho)} = \frac{0{,}583}{1-0{,}75} = 2{,}33 \ \text{seg.}$$