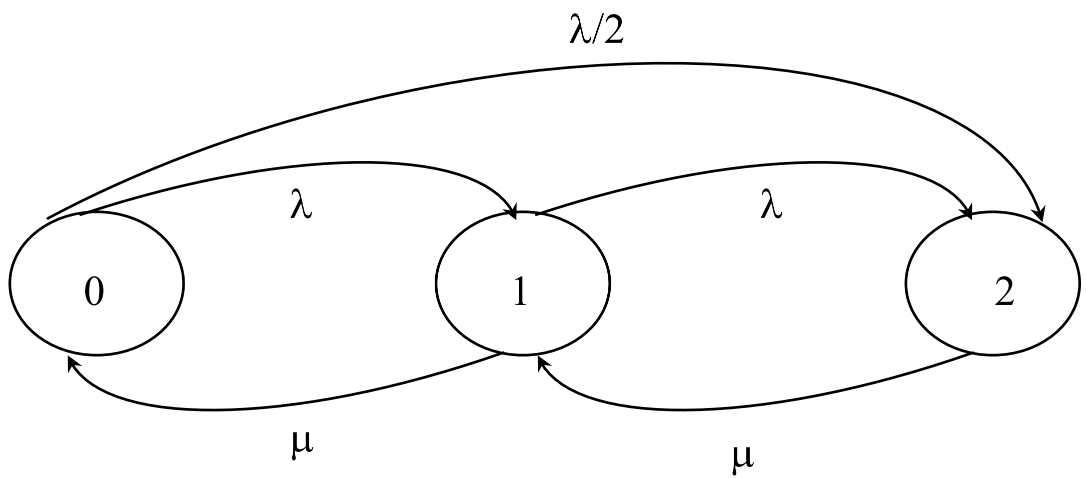
Filas Markovianas em Equilíbrio

Prof.: S. Motoyama

Filas Markovianas em Equilíbrio

As equações de equilíbrio valem não somente para processos de nascimento e morte; valem também para processos markovianos em geral.

Exemplo



Equações de Equilíbrio

$$\frac{3}{2}\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$(\lambda + \mu) P_1 = \lambda \; P_0 + \mu P_2$$

$$\mu P_2 = \lambda P_1 + \frac{\lambda}{2} P_0$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

Sistema de Fila com Chegadas em Lotes (Bulk)

Suposições:

a) Os pacotes têm comprimentos aleatórios.

b) Sistema com um servidor

c) Pacotes chegam em lotes de tamanho aleatório

Sejam

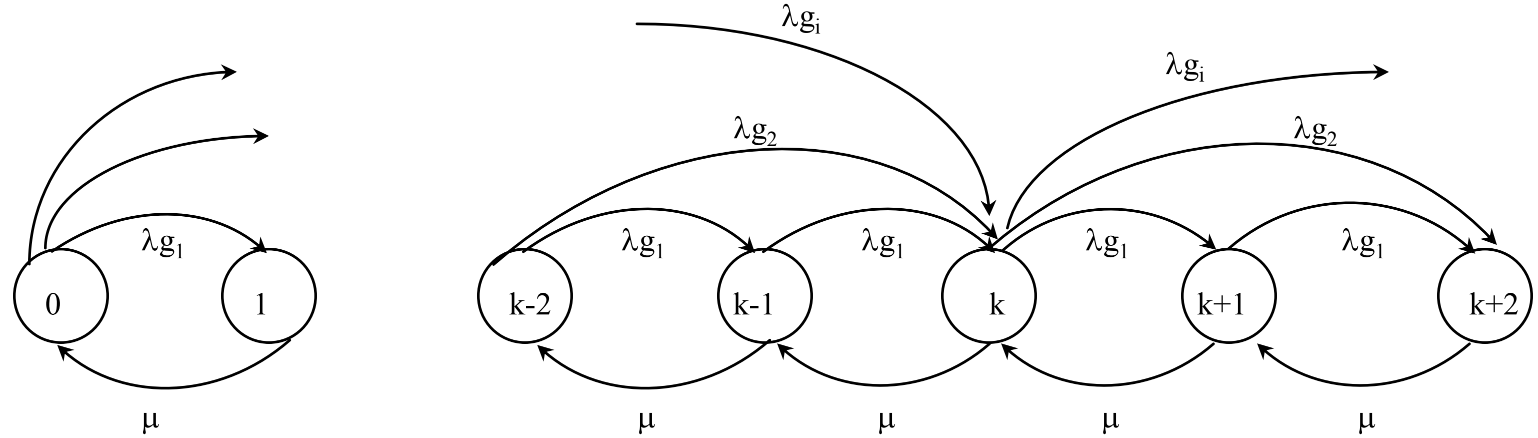
g_i = Pr {lote de tamanho i}

λ = taxa de chegada dos lotes

μ = taxa de partida dos pacotes

k = número de pacotes no sistema

Diagrama de transição de estado



Equações de Equilíbrio

$$\lambda g_{\mathbf{1}} + \lambda g_{\mathbf{2}} + \cdots = \lambda \sum_{i=\mathbf{1}}^{\infty} g_i = \lambda$$

$$\begin{cases} (\mu + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda g_i) P_k = \mu P_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda g_{k-i} P_i & , \ \mathrm{k} \geq 1 \\ \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \lambda \mathrm{g}_{\mathrm{i}} P_0 = \mu P_1 & , \ \mathrm{k} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mu + \lambda) P_k = \mu P_{k+1} + \lambda \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} P_i & , \ \mathrm{k} \geq 1 \\ \lambda P_0 = \mu P_1 & , \ \mathrm{k} = 0 \end{cases}$$

Resolução por Transformada Z

$$(\mu+\lambda)\sum_{k=1}^{\infty} z^k P_k = \frac{\mu}{z}\sum_{k=1}^{\infty} z^{k+1} P_{k+1} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} P_i z^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k P_k = P(z) - P_0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{k+1} P_{k+1} = P(z) - P_0 - zP_1$$

Se

$$\mathrm{k - 1 = i} \Rightarrow \mathrm{k = i+1}$$

$$\begin{cases} k = 1 \Rightarrow i = 0 \\ k \to \infty \quad i \to \infty \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i+1}^{\infty}$$

Resolução (cont.)

$$\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} P_i z^k = \lambda\sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i \sum_{k=i+1}^{\infty} g_{k-i} z^{k-i}$$

$$= \lambda\sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j \quad , \; k - i = j$$

Definindo

$$G(z) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j$$

Se, $g_0 = 0$, não há lote com tamanho zero

$g_0 > 0$, há lote ,

Portanto,

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)[P(z)-P_0] = \dfrac{\mu}{z}[P(z)-P_0-zP_1] + \lambda P(z)G(z) \\ P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}P_0 \end{cases}$$

Resolução (cont.)

Separando P(z)

$$P(z)[(\lambda+\mu)-\frac{\mu}{z}-\lambda G(z)] = P_0[-\frac{\mu}{z}-\lambda+\lambda+\mu] = P_0\mu[\frac{z-1}{z}]$$

$$P(z) = \frac{P_0\mu[\frac{z-1}{z}]}{\frac{(\lambda+\mu)z-\mu-\lambda zG(z)}{z}}$$

$$P(z) = \frac{P_0\mu[(z-1)]}{\mu(z-1)+\lambda z[1-G(z)]} \quad ou$$

$$P(z) = \frac{P_0\mu[(1-z)]}{\mu(1-z)-\lambda z[1-G(z)]}$$

Resolução (cont.)

Utilizando a propriedade da transformada z, para z = 1 $\Longrightarrow$ P(z = 1) = 1.
Mas, neste caso P(1) = 0/0, uma indeterminação.

Aplicando L'Hospital

$$P'(z) = \frac{\mu P_0(-1)}{\mu(-1) - [\lambda - (\lambda z G'(z) + \lambda G(z))]}$$

$$1 = P'(1) = \frac{-\mu P_0}{-\mu + \lambda - \lambda + \lambda G'(1)} \quad , \quad G(1) = 1$$

$$\mu P_0 = \mu - \lambda G'(1)$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} G'(1)$$

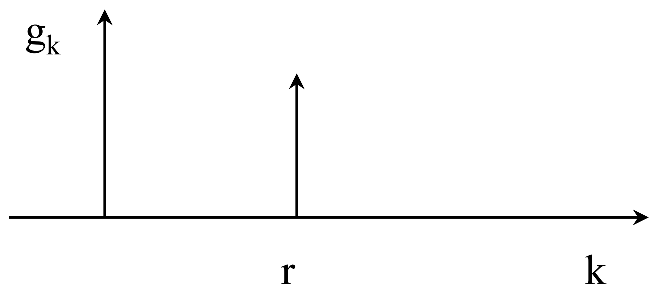
Definição

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} G'(1) \quad , \quad G'(1) = E\{g_i\}$$

Resolução (cont.)

$$P(z)=\frac{\mu[1-\rho][(1-z)]}{\mu(1-z)-\lambda z[1-G(z)]}, \qquad \rho=\frac{\lambda}{\mu}G'(1),\ G'(1)=E\{g_i\}$$

Estudo de caso: Lotes de mesmo tamanho



$$g_k=\begin{cases}1 & k=r\\ 0 & k\neq r\end{cases}$$

$$G(z)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k z^k=\sum_{k=1}^{\infty}z^k=z^r$$

Resolução (cont.)

Exemplo 1: O lote tem tamanho = 4 pacotes. Calcular o número médio de pacotes e o tempo médio de espera.

Solução:

$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z[1-G(z)]}$$

$$G(z) = z^4$$

$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z[1-z^4]}$$

$$= \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z(1-z^2)(1+z^2)}$$

$$= \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z(1-z)(1+z)(1+z^2)}$$

$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu - \lambda z(1+z)(1+z^2)}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} G'(1) \quad , \qquad G'(1) = E\{g_i\}$$

média do comprimento dos lotes

Resolução (cont.)

$$G'(1) = 4 \qquad \Rightarrow \qquad \rho = 4\frac{\lambda}{\mu}$$

$$P(1) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu - 4\lambda} = \frac{\mu - 4\lambda}{\mu - 4\lambda} = 1 \qquad \Leftarrow$$ Satisfaz a propriedade da transf. z

Número médio de pacotes

$$P'(z) = \frac{-\mu(1-\rho)[-\lambda(1+2z+3z^2+4z^3)]}{[\mu - \lambda(z+z^2+z^3+z^4)]}$$

$$P'(1) = \frac{10\lambda\mu(1-\rho)}{(\mu-4\lambda)^2} = \frac{10\lambda(\mu-4\lambda)}{(\mu-4\lambda)^2}$$

$$P'(1) = \frac{10\lambda}{\mu-4\lambda} = E\{k\}$$

$$E\{T\} = \frac{E\{k\}}{\lambda G'(1)} = \frac{E\{k\}}{4\lambda} = \frac{5}{2(\mu-4\lambda)}$$

λG'(1) = taxa média de chegada dos pacotes

Exemplo 2

Para r = 1 teremos o caso de uma fila M/M/1

$G(z) = z^r \longrightarrow G(z) = z$

$$P(z) = \frac{P_0\mu(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z[1-G(z)]}$$

$$= \frac{P_0\mu(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z[1-z]}$$

$$P(z) = \frac{P_0\mu}{\mu - \lambda z} = \frac{P_0}{1-\rho z}$$

$$P(1) = \frac{P_0}{1-\rho} = 1 \quad , \quad P_0 = 1-\rho$$

$$P'(z) = \frac{-P_0(-\rho)}{[1-\rho z]^2}$$

$$P'(1) = \frac{P_0\rho}{[1-\rho]^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$