Teoria de Fila

Prof.: S. Motoyama

Caracterização de uma Fila

Uma fila é caracterizada por:

- Processo de chegada
- Processo de atendimento
- Disciplina (tipo) de atendimento
- Número de servidores
- Limitação do local de atendimento
- Tamanho da população que procura a fila

Notação de Kendall

A / B / m / k / L

- A, descreve a distribuição do processo de chegada.
- B, descreve a distribuição do processo de atendimento.
- m, representa o número de servidores.
- k, representa o tamanho máximo do sistema de fila (capacidade do buffer somada ao número de servidores).
- L, tamanho da população que procura a fila.

Quando o k ou L ou ambos são omitidos significa que têm valores infinitos.

Exemplo

A, B $\in$ { M, Er, D, G, etc }

M = distribuição exponencial negativa (markoviano)
G = distribuição qualquer (geral)
Er = distribuição de Erlang
D = distribuição deterministica

Exemplo:

D / M / 2 / 20

- Fila com 2 servidores
- Capacidade de armazenamento = 18 unidades
- Tempo entre chegadas: constante
- Tempo de atendimento: exponencial negativa
- Tamanho da população: infinito

Processos Estocásticos

Um conjunto de variáveis aleatórias X(t), indexados em tempo, é denominado processo estocástico ou processo aleatório.

O processo aleátorio é caracterizado por:

A) Espaço de estado
B) Parâmetro indexado
C) Depêndencia estatística

A) Espaço de Estado

O conjunto de possíveis valores (estados) que X(t) pode assumir é denominado espaço de estado.

Ex.: O movimento das particulas em uma sala.

a) se as posições das partículas em um intervalo de tempo são infinitas, é denominado um processo de estado contínuo.

Parâmetro Indexado (Tempo)

b) se as posições das partículas são finitas e contáveis, é denominado processo de estado discreto ou cadeia.

B) Parâmetro indexado (tempo)

a) se os tempos permitidos para mudanças de posições são finitos ou contáveis, é denominado de processo de parâmetro discreto (X_n).

b) se as mudanças podem ocorrer em qualquer instante (em um intervalo finito ou infinito), é denominado processo de parâmetro contínuo.

C) Dependência Estatística

Estabelece o relacionamento entre as variáveis aleatórias X(t) ou X_n com outros membros da mesma família.

Dependência Estatística

A dependência estatística é completamente especificada pela probabilidade conjunta.

$$F_{\underline{X}}(\underline{x};\underline{t}) = \Pr\{X(t_1) \le x_1, \ldots. X(t_n) \le x_n\}$$

$$\underline{X} = [X(t_1), X(t_2) \ldots\ldots],$$

$$\underline{x} = [x_1, x_2 \ldots\ldots x_n],$$

$$\underline{t} = [t_1, t_2 \ldots. t_n]$$

Processo Estaciónario

$$F_{\underline{X}}(\underline{x};\underline{t} + \tau) = F_{\underline{X}}(\underline{x};\underline{t})$$

Processos Independentes

$$F_{\underline{X}}(\underline{x};\underline{t}) = F_{X_1 \ldots. X_n}(x_1, \ldots x_n; t_1 \ldots t_n) =$$

$$= F_{X_1}(x_1; t_1) \ldots. F_{X_n}(x_n; t_n)$$

Processo Markoviano

É um processo estocástico tal que,

$$\Pr\left\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} / X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots X(t_1) = x_1\right\} =$$

$$= \Pr\left\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} / X(t_n) = x_n\right\}$$

onde

$t_1 < t_2 < \ldots\ldots\ldots < t_n < t_{n+1}$ e,

$x_i \rightarrow$ espaço de estado discreto

Processo de Nascimento e Morte

É uma classe especial de processo markoviano em que são permitidas somente transições aos estados vizinhos.

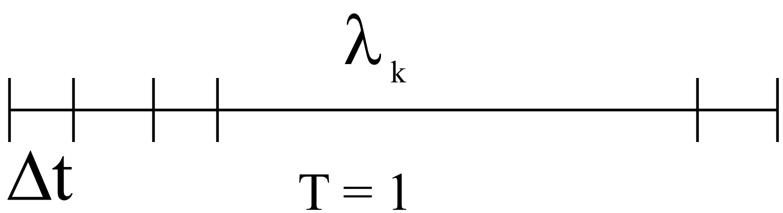
Processo de Nascimento e Morte

Seja o processo de nascimento e morte com os seguintes parametros

$\lambda_k \rightarrow$ taxa de nascimento quando a população for k (nascimentos por unidade de tempo)

$\mu_k \rightarrow$ taxa de morte quando a população for k (mortes por unidade de tempo

Uma unidade de tempo T=1 é dividida em n intervalos, sendo cada intervalo de tamanho Δt.



Δt é pequeno que somente 1 nascimento é possível.

Processo de Nascimento e Morte (cont.)

n = número de intervalos = $\dfrac{1}{\Delta t}$

A probabilidade de se ter um nascimento no intervalo Δt é

$\dfrac{\lambda_k}{1/\Delta t} = \lambda_k \Delta t$, considerando independência de nascimentos em intervalos de tempo adjacentes.

A probabilidade de nenhum nascimento é $1 - \lambda_k \Delta t$

P{exatamente 1 nasc. em (t, t + Δt)/ pop. é k} = λ_k Δt + o(Δt)

o(Δt) é tal que

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \to 0} o(\Delta t) = 0 \\ &\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Multiplos nascimentos em um intervalo de tempo pequeno têm uma prob. pequena de ocorrer.

Processo de Nascimento e Morte (cont.)

P{exatamente 0 nasc. em (t, t + Δt)/ pop. é k} = $1 - \lambda_k \Delta t - o(\Delta t)$

Similarmente,

P{exatamente 1 morte em (t, t + Δt)/ pop. é k} = $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$

e

P{exatamente 0 morte em (t, t + Δt)/ pop. é k} = $1 - \mu_k \Delta t - o(\Delta t)$

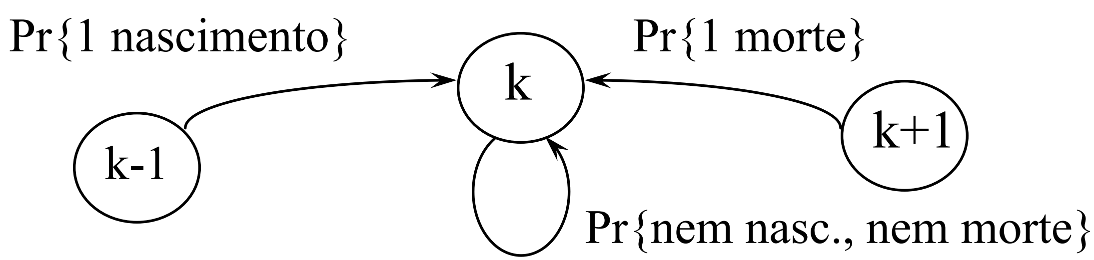
Qual é a probabilidade da população ser k em um instante t ?

$$P_k (t) = P \{ X (t) = k \}$$

Processo de Nascimento e Morte (cont.)

As seguintes possibilidades podem ocorrer para que no instante ($t + \Delta t$), esteja no estado E_k.

1. A população é k no instante t e não houve mudança.
2. A população é k - 1 no instante t e houve 1 nascimento no intervalo ($t, t + \Delta t$).
3. A população é k + 1 no instante t e houve 1 morte no intervalo, ($t, t + \Delta t$).



Processo de Nascimento e Morte (cont.)

Podemos escrever

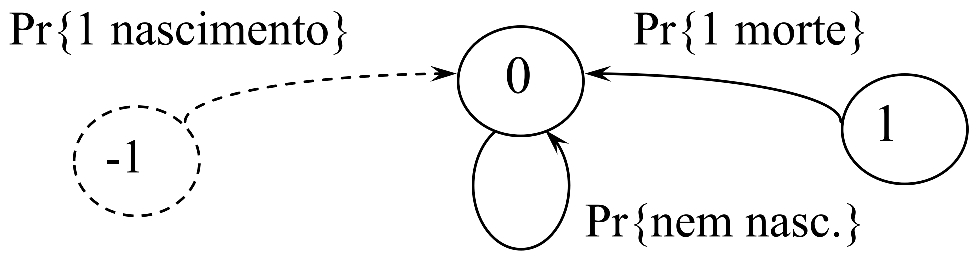
$$P_k(t + \Delta t) = P_{k-1}(t)\, Pr\{1 \text{ nasc. em } (t, t + \Delta t)\} +$$
$$+ P_{k+1}(t)\, Pr\{1 \text{ morte em } (t, t + \Delta t)\} +$$
$$+ P_k(t)\, Pr\{\text{nem nasc., nem morte}\}$$

$$P_k(t + \Delta t) = P_{k-1}(t)[\lambda_{k-1}\Delta t + o(\Delta t)] +$$
$$+ P_{k+1}(t)[\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)] +$$
$$+ P_k(t)[1 - \lambda_k \Delta t - o(\Delta t)][1 - \mu_k \Delta t - o(\Delta t)]$$

para $k >= 1$

Processo de Nascimento e Morte (cont.)

Para k = 0



$$P_0 (t + \Delta t) = P_1(t) \Pr\{1 \text{ morte em } (t, t + \Delta t)\} +$$
$$+ P_0 (t) \Pr\{\text{não nasc.}\}$$

$$P_0 (t + \Delta t) = P_1(t) [\mu_1 \Delta t + o (\Delta t)] +$$
$$+ P_0 (t) [1 - \lambda_0 \Delta t - o (\Delta t)]$$

para k = 0

Processo de Nascimento e Morte (cont.)

Além disso,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

Desenvolvendo

$$P_k(t + \Delta t) - P_k(t) = P_{k-1}(t)[\lambda_{k-1}\Delta t + o(\Delta t)] +$$
$$+ P_{k+1}(t)[\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)] +$$
$$+ P_k(t)[-\lambda_{k-1}\Delta t - \mu_k \Delta t + o(\Delta t)]$$

Os termos em $(\Delta t)^2$ foram agrupados em o (Δt). Dividindo por Δt e calculando o limite,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = P_{k+1}(t)\mu_{k+1} + P_{k-1}(t)\lambda_{k-1} + P_k(t)[-\lambda_k - \mu_k], \quad k \geq 1$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = P_1(t)\mu_1 + P_0(t)[-\lambda_0], \quad k = 0$$

Processo de Nascimento e Morte (cont.)

ou

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_k(t)}{dt} = P_{k+1}(t)\mu_{k+1} + P_{k-1}(t)\lambda_{k-1} + P_k(t)[-\lambda_k - \mu_k], \ \ \mathrm{k} \geq 1 \\
\dfrac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\mu_1 + P_0(t)[-\lambda_0], \ \ \mathrm{k} = 0 \\
\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1
\end{cases}
$$

Equações de Chapman - Kolmogorov

Equações diferenciais à diferença

Processo de Nascimento e Morte (cont.)

Exemplo: somente nascimento

$\mu_k = 0$,   para todo k

Suposição: $\lambda_k = \lambda$,   para k = 0, 1, 2, ...

Portanto

$$\begin{cases} \dfrac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t) \quad , \quad k \geq 1 \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad , \quad k = 0 \end{cases}$$

Condições de contorno: zero pessoas no instante t = 0

$$P_k(0) = \begin{cases} 1 \ , & k = 0 \\ 0 \ , & k \neq 0 \end{cases}$$

Processo de Nascimento e Morte (cont.)

Resolvendo para $P_o(t)$

$$P_0(t) = \exp(-\lambda t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda \exp(-\lambda t)$$

$$P_1(t) = \lambda t \exp(-\lambda t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda P_2(t) + \lambda P_1(t)$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2 \exp(-\lambda t)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

O processo de nascimento puro, com taxa de nascimento constante λ, constitui um processo poissoniano.