Processo de nascimento e morte em equilíbrio

Prof.: S. Motoyama

Processo em equilíbrio

$$\begin{cases} \dfrac{dP_k(t)}{dt} = P_{k+1}(t)\mu_{k+1} + P_{k-1}(t)\lambda_{k-1} + P_k(t)[-\lambda_k - \mu_k], \ \ \mathrm{k} \geq 1 \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\mu_1 + P_0(t)[-\lambda_0], \quad \mathrm{k} = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \end{cases}$$

Para $\quad t \longrightarrow \infty \Longrightarrow$ equilíbrio estatístico

Isto é,

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = 0 \quad , \qquad \frac{dP_0(t)}{dt} = 0$$

e

$$\lim_{t \to \infty} P_k(t) = P_k$$

Processo em equilíbrio

$$\begin{cases} 0 = P_{k+1}\mu_{k+1} + P_{k-1}\lambda_{k-1} + P_k[-\lambda_k - \mu_k], \quad \text{k} \geq 1 \\ 0 = P_1\mu_1 + P_0[-\lambda_0], \quad \text{k} = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \end{cases}$$

Solução

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_{k+1} = \frac{\lambda_k + \mu_k}{\mu_{k+1}} P_k - \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_{k+1}} P_{k-1}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} P_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0$$

$$= \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0$$

$$= \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 (\frac{\lambda_1}{\mu_1} + 1 - 1)$$

$$= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_0$$

$$\vdots$$

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} P_0 \quad \text{ou } P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

Cálculo de P_0

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i + 1} + P_0 = 1$$

Portanto,

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i + 1}}$$

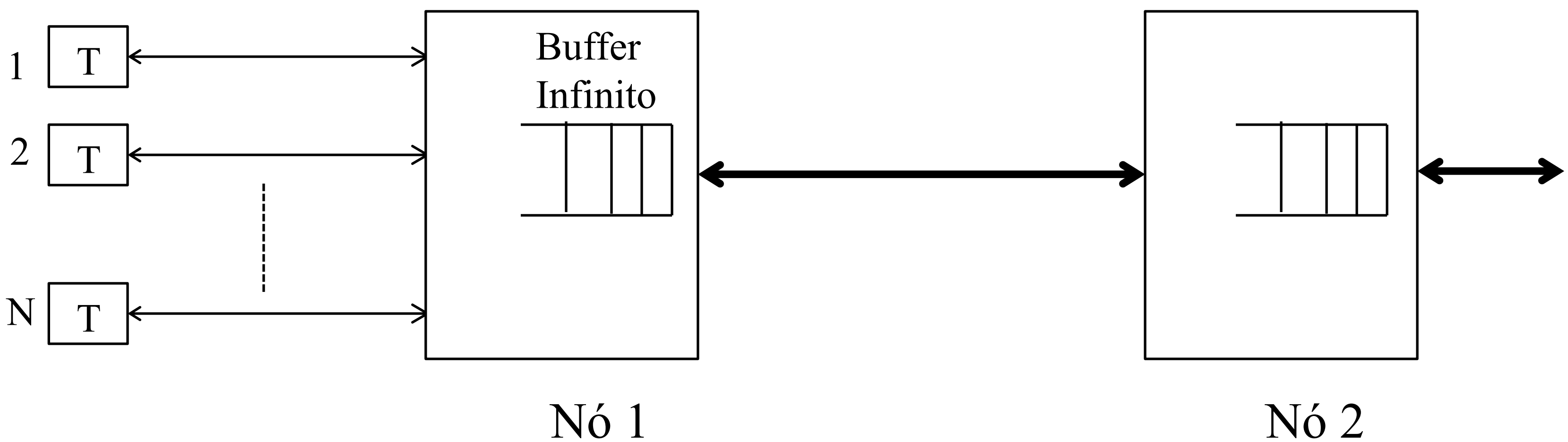
Condição de Estacionaridade

1. $P_0 > 0 \implies$ algumas vezes o sistema deve ficar vazio

2. $\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1$

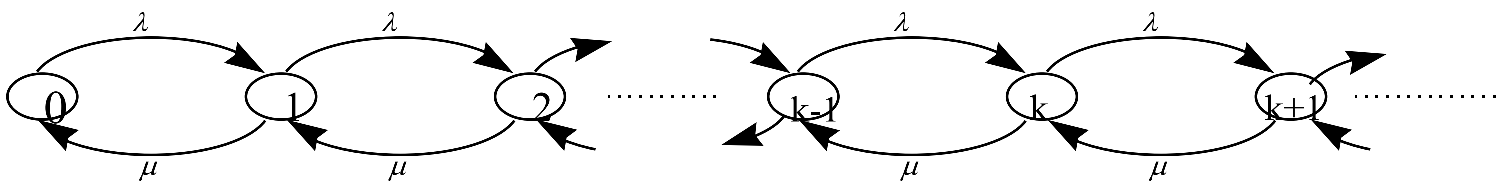
Exemplo 1

Seja um nó de uma rede de computador com um buffer de armazenamento e um link de saída. O processo de chegadas dos pacotes obedece a uma distribuição poissoniana de taxa média λ, e o tempo de transmissão de um pacote tem uma distribuição exponencial negativa com a média $(1/\mu)$ segundos . Quando o link estiver ocupado transmitindo um pacote, todos os outros pacotes que chegam ficam esperando no buffer de tamanho infinito. O esquema de atendimento é do tipo FIFO (first in - first out).



Exemplo 1 (cont.)

Diagrama de Transição



$$
\begin{cases}
P_{k-1}\lambda + P_{k+1}\mu = P_k(\mu + \lambda) \\
P_1\mu = P_0\lambda \\
\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1
\end{cases}
$$

ou

$$
\begin{cases}
P_{k+1} = (\rho + 1)P_k - \rho P_{k-1} \ , \ \ \rho = \dfrac{\lambda}{\mu} \\
P_1 = \rho P_0 \\
\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1
\end{cases}
$$

Exemplo 1 (cont.)

Resolvendo

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \rho P_0 \\
P_2 &= (\rho + 1)P_1 - P_0 = (\rho + 1)\rho P_0 - \rho P_0 = \rho^2 P_0 \\
&\vdots \\
P_k &= \rho^k P_0
\end{aligned}
$$

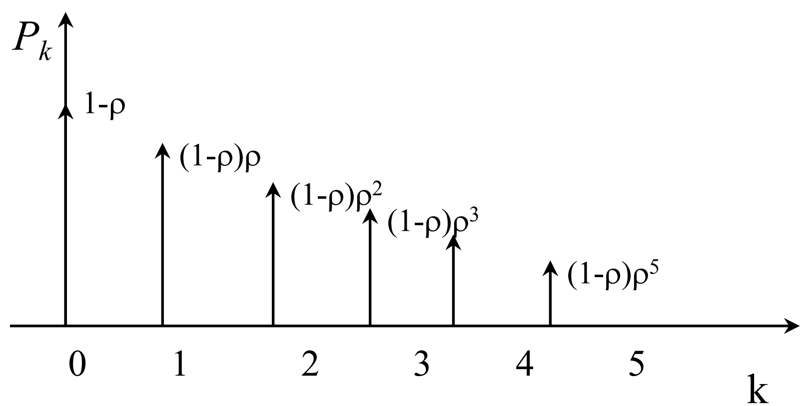
Cálculo de P_o

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k}_{\text{Prog. geom.}} = P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1$$

Para $\rho < 1$, condição de estacionaridade

$P_o = 1 - \rho$, e

$P_k = \rho^k (1 - \rho)$



O gráfico da figura mostra que a probabilidade P_k diminui com aumento de k; por ex., a probabilidade de se ter dois pacotes no sistema é maior do que a probabilidade se ter 3 pacotes.

Cálculo da Média

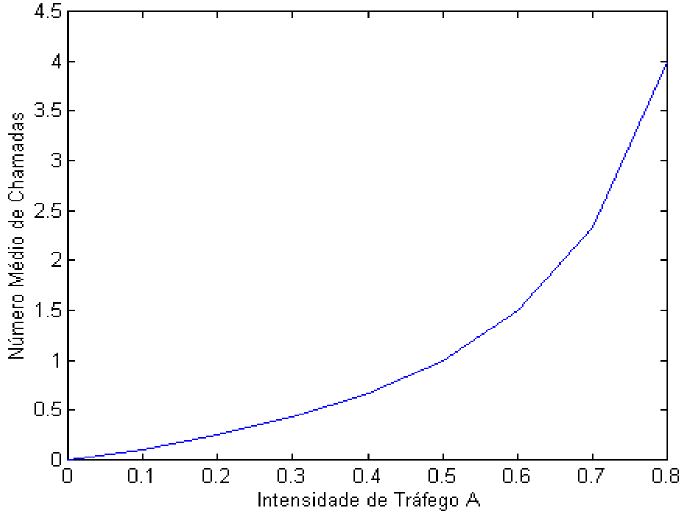
$$E\{k\} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k,$$

Mas,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Logo,

$$E\{k\} = \frac{\rho}{1-\rho}$$



Para ρ aproximando do valor 1 o número médio de pacotes tende a infinito. Isto significa que teremos uma fila com um número muito grande de pacotes esperando.
Em geral, estamos também interessados em saber qual é o tempo médio de espera dos pacotes. Para estabelecer a relação entre o número médio e o tempo médio de pacotes, existe o teorema de Little.

Teorema de Little

O teorema de Little estabelece que,

$$E\{T\} = \frac{E\{k\}}{\lambda_{ef}}$$

onde,

λ_{ef} é a taxa média de pacotes que efetivamente foram atendidos.

Este relacionamento é bastante geral, e não depende da distribuição da chegada, nem do tempo de serviço, nem do número de servidores, e nem do tipo de atendimento.

Assim,

$$E\{T\} = \frac{E\{k\}}{\lambda} = \frac{A}{\lambda(1-A)} = \frac{1}{\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$E\{T\} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

A expressão acima mostra que quando λ se aproxima de μ, o tempo de espera tende a infinito. É a situação em que se forma uma fila muito grande.

Teorema de Little

Intuição:

Um cliente ao chegar a um sistema de fila deve encontrar em média um mesmo número $E\{k\}$ de clientes ao deixar o sistema de fila.

Quando ele deixa o sistema de fila, chegaram λ clientes vezes o tempo médio no sistema de fila que é $E\{T\}$.

Isto é,

$$E\{k\} = \lambda\, E\{T\}$$

A relação vale também para

$$E\{k_q\} = \lambda\, E\{W\} \text{ , onde}$$

$E\{k_q\}$ = número médio de clientes na fila.

$E\{W\}$ = tempo médio de espera na fila.

Vale também para

$$E\{k_s\} = \lambda\, E\{x\}$$

$E\{k_s\}$ = número médio de clientes sendo atendidos

$E\{x\}$ = tempo médio de serviço

Teorema de Little

É sempre verdade que

E{T} = E{x} + E{W}

O tempo gasto no sistema é igual a soma do tempo de serviço mais o tempo de espera na fila.

Fator de utilização

É a relação entre o trabalho máximo de entrada pela capacidade de trabalho que o sistema pode executar.

Para o caso de um servidor e taxa λ de entrada

$$\rho = \frac{\text{taxa media de chegada x tempo medio de serviço}}{\text{1 servidor}} = \lambda E\{x\}$$

No caso de m servidores

$$\rho = \frac{\lambda E\{x\}}{m}$$

Outras denominações

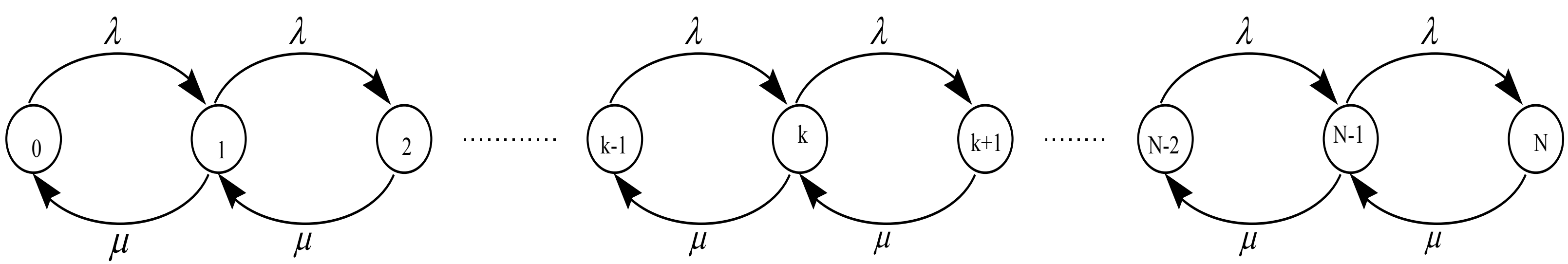
ρ = intensidade de tráfego, dada em Erlang (E) em homenagem a A.K. Erlang.

ρ = fator de intensidade ou carga.

Exemplo 2

Seja o Exemplo 1, mas suponha que o buffer, como ocorre na prática, tenha uma capacidade finita, e que possa acomodar até (N-1) pacotes. Acima desse número os pacotes são descartados. Na notação de Kendall é uma fila do tipo M/M/1/N.

Diagrama de transição de estado



Exemplo 2 (cont.)

Equações de equilíbrio

$$\begin{cases} P_{k+1} = (1+\rho)P_k - \rho P_{k-1}, \quad 1 \le k \le N-1 \\ P_N = \rho P_{N-1}, \;\; k = N \\ P_1 = \rho P_0, \;\; k = 0 \\ \sum_{k=0}^{N} P_k = 1 \end{cases}$$

A solução para P_k é a mesma solução da fila M/M/1. Portanto,

$$P_k = \rho^k P_0$$

Cálculo do P_0

$$\sum_{k=1}^{N} \rho^k P_0 + P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \rho^k}$$

Exemplo 2 (cont.)

Porém,

$$\sum_{k=0}^{N} \rho^k = \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}, \quad \text{para } \rho < 1$$

Portanto,

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

e

$$P_k = \rho^k \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, \quad \text{para } 0 \le \text{k} \le \text{N}$$

Cálculo da probabilidade de bloqueio

Definição:
Probabilidade de bloqueio = P_B = Pr {N lugares ocupados / 1 chegada }

Pr {N lugares ocupados / 1 chegada }. Pr { 1 chegada } =

Pr { 1 chegada / N lugares ocupados }. Pr { N lugares ocupados }

Mas,

Pr {1 chegada / N lugares ocupados } = Pr { 1 chegada }

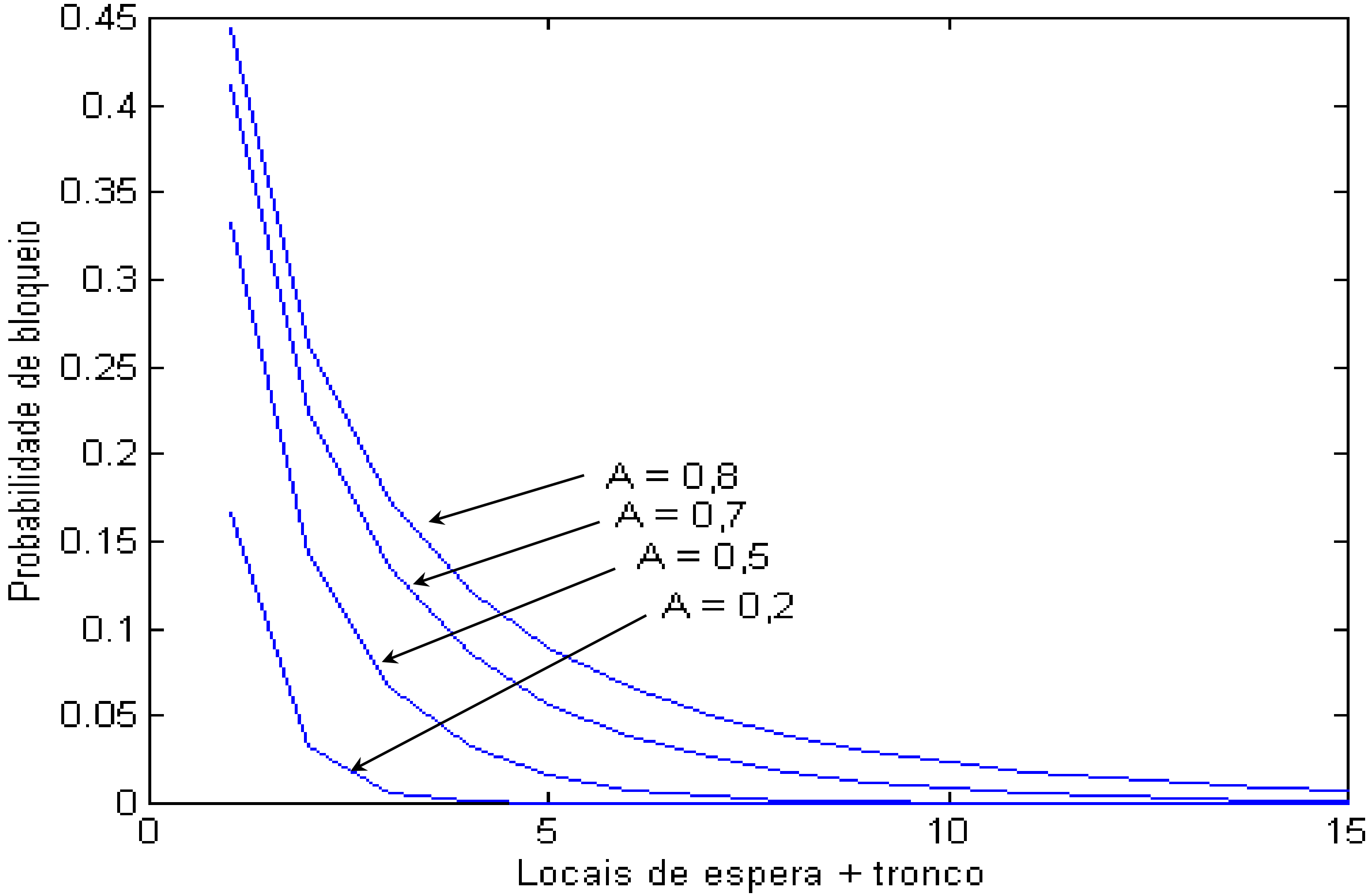
Portanto,

P_B = Pr { N lugares ocupados / 1 chegada } = Pr {N lugares ocupados }

Assim, a probabilidade de bloqueio em consideração é P_N , e a taxa média de pacotes perdidos é $\lambda\ P_N$. A taxa média de pacotes escoados ou atendidos é $\lambda\ (1 - P_N)$.

$$P_B = P_N = \rho^N \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

Probabilidade de Bloqueio



Cálculo de Bloqueio - outra maneira

Para um sistema de fila M/M/1 podemos dizer que nas condições estacionárias, o número médio de chegadas é igual ao número médio de partidas, se o buffer não estiver vazio.

A taxa de partida é dada por

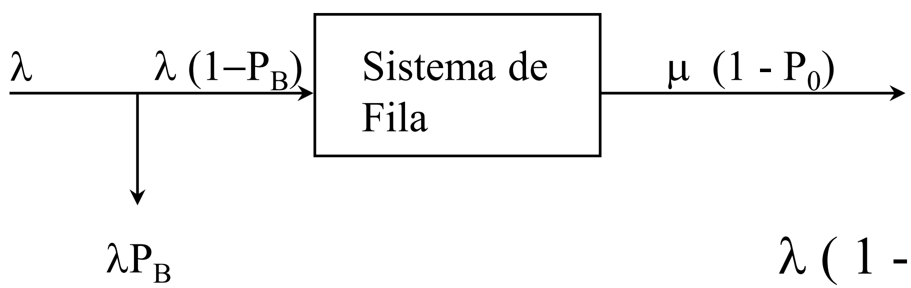
$$(1 - P_0)\mu,$$

onde

$1 - P_0$ = Probabilidade de não encontrar o sistema vazio.

Assim,

$\lambda = (1 - P_0)\,\mu \quad \Longrightarrow \quad P_0 = 1 - \rho$, resultado encontrado anteriormente



$$\lambda\,(1 - P_B) = \mu\,(1 - P_0)$$

Cálculo de Bloqueio - outra maneira (cont.)

$\lambda (1 - P_B) = \mu (1 - P_0)$

$$P_B = 1 - \frac{\mu(1 - P_0)}{\lambda} = \frac{P_0 - (1-\rho)}{\lambda}$$

Mas

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

Portanto,

$$P_B = \frac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$$

Exercício

Seja um nó de rede de computador com dois enlaces de saída. O buffer de espera no nó possui um lugar de espera. O processo de geração dos pacotes obedece a uma distribuição de Poisson de taxa média λ e a distribuição do tempo de transmissão de um pacote é exponencial negativa de média $1/\mu$.

a) Desenhe o diagrama de transição de estado.

b) Escreva as equações de equilíbrio.

c) Calcule o número médio de pacotes no nó.

d) Calcule a probabilidade de bloqueio.

e) Calcule o tempo médio de espera de pacotes no nó.