Processo de Nascimento e Morte (Cont.)

Prof.: S. Motoyama

Central com N troncos - Fórmula de Erlang

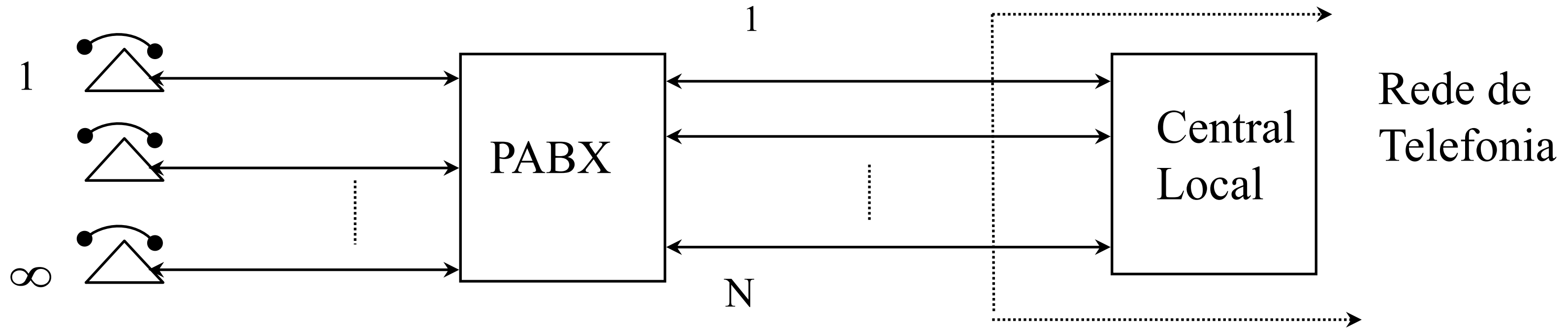
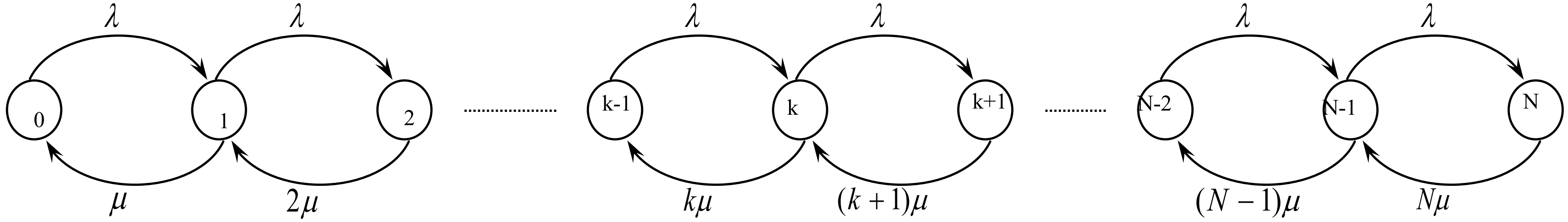


Diagrama de transição de estados



$$\begin{cases} P_k(\lambda + k\mu) = P_{k+1}(k+1)\mu + \lambda P_{k-1} \ ,1 \le k < N \\ P_N(N\mu) = \lambda P_{N-1} \ ,k = N \\ P_0\lambda = \mu P_1 \ ,k = 0 \\ \sum_{k=0}^{N} P_k = 1 \end{cases}$$

Resolução

Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} P_1 = AP_0 \\ P_{k+1} = \dfrac{1}{(k+1)}\left[(A+k)P_k - AP_{k-1}\right] \\ P_N = \dfrac{A}{N} P_{N-1} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N} P_k = 1 \end{cases}$$

$$k = 1$$

$$P_2 = \frac{AP_0}{2}(A+1) - \frac{AP_0}{2} = \frac{A^2 P_0}{2}$$

$$k = 2$$

$$P_3 = \frac{1}{3}\left[(A+2)\frac{A^2}{2}P_0 - A^2 P_0\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{A^3 P_0}{2} + A^2 P_0 - A^2 P_0\right] = \frac{1}{6}A^3 P_0$$

⋮

Resolução (cont.)

Por indução, podemos escrever

$$P_k = \frac{A^k}{k!} P_0, \quad 1 \le k \le N$$

Mas,

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}}$$

Portanto,

$$P_k = \frac{\frac{A^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}}$$

A equação acima representa a probabilidade de se ter k chamadas em conversação na central. A probabilidade de bloqueio será

Pr { N troncos ocupados / 1 chamada } = Pr { N troncos ocupados } = $P_N = P_B$

$$P_N = P_B = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}} = E_{1,N}(A)$$

A fórmula acima é conhecida como Erlang-B

Fórmula de Recorrência

A fórmula anterior não é conveniente para valores grande de A e de N. Por exemplo, para A = 1000 e N = 100, a relação $A^N/N!$, poderá levar a erros de precisão. Podemos escrever

$$E_{1,N-1}(A) = \frac{\dfrac{A^{N-1}}{(N-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}}$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = \frac{\dfrac{A^{N-1}}{(N-1)!}}{E_{1,N-1}(A)} + \frac{A^N}{N!}$$

Substituindo em P_B

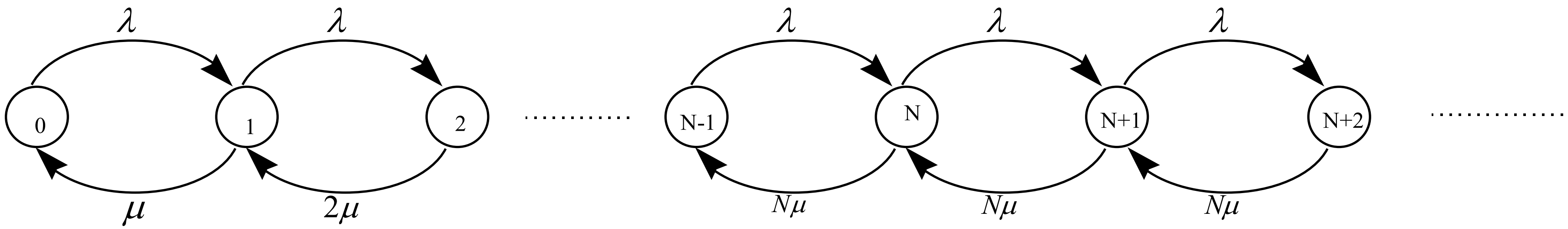
$$E_{1,N}(A) = \frac{\dfrac{A^N}{N!}}{\dfrac{NAA^{N-1}/(N-1)!}{NAE_{1,N-1}(A)} + \dfrac{A^N}{N!}} = \frac{1}{\dfrac{N}{AE_{1,N-1}(A)} + 1}$$

$$E_{1,N}(A) = \frac{AE_{1,N-1}(A)}{N + AE_{1,N-1}(A)} \quad , \quad E_{1,0} = 1$$

Central com N troncos e infinitos locais de espera

Fila do tipo M/M/N

Diagrama de transição de estados



Equações de equilíbrio:

a) Para k ≤ N

$$\begin{cases} P_k\left(k\mu + \lambda\right) = P_{k-1}\lambda + (k+1)\mu P_{k+1} \quad \text{e} \\ P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_0 \end{cases}$$

Solução conhecida e é

$$P_k = \frac{A^k}{k!} P_0 \ , \ k \le N$$

N troncos e infinitos locais (cont.)

b) Para k $\geq$N

$$\begin{cases} P_N\left(N\mu+\lambda\right) = P_{N-1}\lambda + P_{N+1}N\mu \quad \text{ou} \\ P_{N+1} = P_N(1+\dfrac{\lambda}{N\mu}) - \dfrac{\lambda}{N\mu}P_{N-1} \end{cases}$$

Pela expressão do item a)

$$P_N = \frac{A^N}{N!}P_0$$

Assim,

$$P_{N+1} = \frac{A^N}{N!}\left(1+\frac{A}{N}\right)P_0 - \frac{A^{N-1}}{(N-1)!}\frac{A}{N}P_0 = \frac{A^{N+1}}{N!N}P_0$$

$$P_{N+2} = P_{N+1}\left(1+\frac{A}{N}\right) - \frac{A}{N}P_N = \frac{A^{N+1}}{N!N}\left(1+\frac{A}{N}\right)P_0 - \frac{A}{N}\frac{A^N}{N!}P_0 = \frac{A^{N+2}}{N!N^2}P_0$$

$$\vdots$$

$$P_k = \frac{A^k}{N!N^{k-N}}P_0\,,\quad \text{k} \geq \text{N}$$

Cálculo de P_0

P_o pode calculada através de

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{A^k}{N!\,N^{k-N}} = \frac{1}{P_0}$$

$$\frac{1}{N!}\sum_{k=N}^{\infty} \frac{A^k}{N^{k-N}} = \frac{1}{N!}\sum_{k=N}^{\infty} \frac{A^N A^{k-N}}{N^{k-N}} = \frac{A^N}{N!}\sum_{k=N}^{\infty}\left(\frac{A}{N}\right)^{k-N} =$$

$$k - N = c \Rightarrow k = N \Rightarrow c = 0$$

$$= \frac{A^N}{N!}\sum_{c=0}^{\infty}\left(\frac{A}{N}\right)^{c} = \frac{A^N}{N!}\frac{1}{1 - A/N}$$, para $\frac{A}{N} = \rho < 1$, condição de estacionaridade

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^N}{N!\left(1 - A/N\right)}}$$

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{A^k}{k!} P_0 \text{ , } k \leq N \\ \dfrac{A^k}{N!N^{k-N}} P_0 \text{ , } k \geq N \end{cases}$$

Probabilidade de haver espera

$$\Pr\{espera\} = \Pr\{k \geq N\} = \sum_{k=N}^{\infty} P_k$$

$$= \sum_{k=N}^{\infty} \frac{A^k}{N!N^{k-N}} P_0 = \frac{N^N}{N!} P_0 \sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{A}{N}\right)^k$$

$$Se \quad z = k - N \quad \Rightarrow k = z + N$$

$$= \frac{N^N}{N!} P_0 \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{A}{N}\right)^{z+N} = \frac{N^N}{N!} P_0 \left(\frac{A}{N}\right)^N \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{A}{N}\right)^z$$

Portanto,

$$\Pr\{espera\} = \frac{A^N}{N!} \left(\frac{N}{N-A}\right) P_0 = E_{2,N}(A) \longleftarrow$$ Fórmula de Erlang-C ou de 2a. espécie.

Número médio de chamadas em espera no buffer

$$E\{N_q\} = \sum_{k=N+1}^{\infty} (k-N) P_k$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} (k - N) \frac{A^k}{N!\, N^{k-N}} P_0$$

$$= \frac{P_0}{N!\, N^{-N}} \sum_{k=N+1}^{\infty} (k-N) \left(\frac{A}{N}\right)^k$$

Número médio de chamadas em espera (cont.)

$$= \frac{P_0}{N!\,N^{-N}} \left(\frac{A}{N}\right)^N \sum_{z=1}^{\infty} z \left(\frac{A}{N}\right)^z$$

$$= \frac{A^N}{N!} P_0 \frac{A/N}{\left(1 - A/N\right)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{A^N}{N!} \frac{N}{N-A} P_0}_{E_{2,N}(A)} \frac{N}{N-A} \frac{A}{N}$$

$$E\left\{N_q\right\} = E_{2,N}(A) \frac{A}{N-A}$$

Tempo médio de espera no buffer.
Por Little,

$$E\left\{W_q\right\} = \frac{E\left\{N_q\right\}}{\lambda} = \frac{E_{2,N}(A)\,\lambda/\mu}{\lambda(N-A)} = \frac{E_{2,N}(A)}{\mu(N-A)}$$

Buffer de tamanho finito

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^k}{k!}+\sum_{k=N}^{N+L}\frac{A^k}{N!\,N^{k-N}}=\frac{1}{P_0}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^k}{k!}+\frac{N^N}{N!}\sum_{k=N}^{N+L}\left(\frac{A}{N}\right)^k=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^k}{k!}+\frac{N^N}{N!}\left(\frac{A}{N}\right)^N\frac{1-\left(A/N\right)^{L+1}}{1-A/N}=\frac{1}{P_0}$$

$$P_0=\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^k}{k!}+\frac{A^N}{N!}\frac{1-\left(A/N\right)^{L+1}}{1-A/N}}$$

P_B = Pr { N troncos e L locais ocupados / 1 chamada } =

Pr { N troncos e L locais ocupados} = P_{N+L}

$$P_B=P_{N+L}=\frac{A^{N+L}}{N!\,N^L}P_0$$

Exercício

1. Seja uma central com 2 troncos de saída e infinitos enlaces de entrada. A chegada das chamadas é poissoniana com taxa 3 chamadas/min. O tempo médio de conversação é 3 minutos (exponencial negativa). O sistema é sem espera. Seja o seguinte tipo de encaminhamento de chamadas: Se os dois troncos estiverem livres, escolhe-se um tronco aleatoriamente, com probabilidade p = 0,5. Se um estiver ocupado, o outro é ocupado sem escolha.

a) Desenhe o diagrama de transição de estado bidimensional.

b) Escreva e resolva as equações de equilibrio.

c) Calcule a probabilidade de bloqueio e compare com aquela obtida pela fórmula de Erlang.

Exercício

2. Seja uma central com 2 troncos de saída e infinitos enlaces de entrada. Os troncos são numerados de 1 a 2. A chegada das chamadas é poissoniana com taxa 3 chamadas/min. O tempo médio de conversação é 3 minutos (exponencial negativa). O sistema é sem espera. Seja o seguinte tipo de encaminhamento de chamadas: se os dois troncos estiverem livres, escolhe-se sempre o tronco número 1. Se o tronco 1 estiver ocupado, o tronco número 2 é ocupado.

a) Desenhe o diagrama de transição de estado bidimensional.

b) Escreva e resolva as equações de equilibrio.

c) Calcule a probabilidade de bloqueio e compare com aquela obtida no Exerc. 6.1

Exercício

3. Um tráfego de 1 E é aplicado à uma central com 2 troncos de saída e infinitos enlaces de entrada. O processo de chegada das chamadas é Poissoniano. A distribuição do tempo de conversação das chamadas é exponencial negativa de média 4minutos. O sistema é sem espera.

a) Qual é o número médio de chamadas aplicadas por hora?

b) Qual é a probabilidade de que nenhuma chamada seja aplicada durante o período de 3 minutos?

c) Qual é a probabilidade de que 2 troncos estejam ocupados?

d) Qual é a probabilidade de que 2 troncos estejam livres?

e) Qual é a probabilidade de bloqueio?

f) Quais são as proporções de tráfego escoado e perdido?

g) Qual é o tempo médio de permanência das chamadas na central?

h) Qual é o número médio de chamadas na central?

Exercício

4. Os troncos de uma PABX são divididos em dois grupos. Um grupo é utilizado somente para receber chamadas externas; o outro grupo é utilizado somente para fazer chamadas externas. A taxa de chamadas que entram é 120 chamadas por hora, tendo cada chamada uma duração média de 4,5 minutos; a taxa de chamadas que saem é 180 chamadas por hora com duração média de 3 minutos. A qualidade de serviço ou a probabilidade de bloqueio exigida é de 2%,

a) Quantos troncos são necessários para atender as chamadas que entram e que saem?

Supondo agora que os troncos são bidirecionais, isto é, os troncos podem receber ou fazer chamadas

b) Quantos troncos são necessários para atender todas as chamadas e satisfazer a mesma qualidade de serviço?

c) Comente os resultados obtidos.