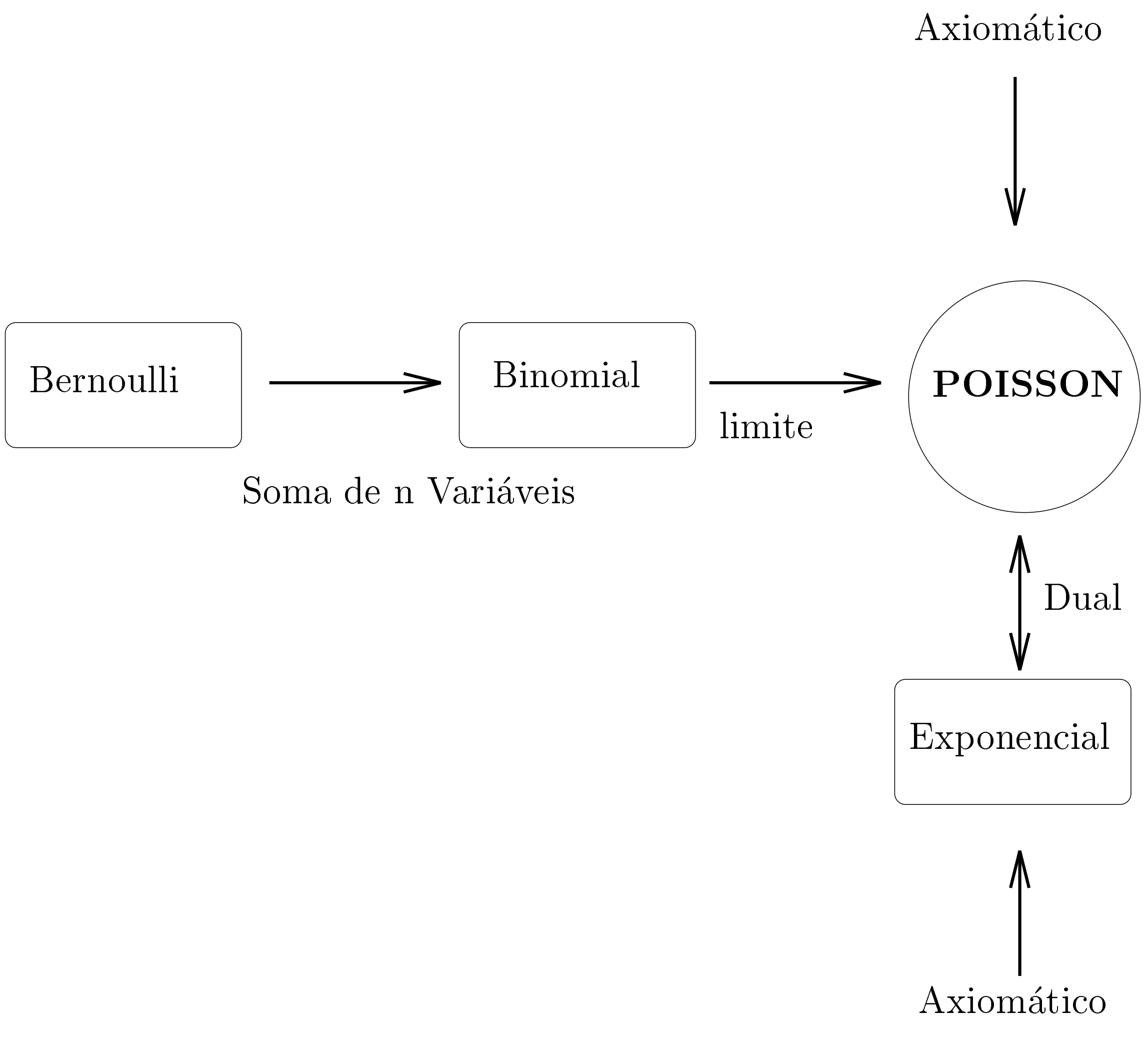
Teoria de Tráfego:

POISSON

Ivanil Bonatti

Shusaburo Motoyama

Junho - Julho de 1999


Axiomático
Bernoulli
Binomial
POISSON
limite
Soma de n Variáveis
Dual
Exponencial
Axiomático

Variável Aleatória de Bernoulli

Modela processos com duas possibilidades.

Por exemplo: probabilidade de um dado circuito estar **livre** ou **ocupado**.

$$\Pr\{X = 1\} = p > 0 \;\; ; \;\; \Pr\{X = 0\} = 1 - p = q$$

$E\{X\}$ = **Esperança Matemática** ou Valor Médio Esperado ou Média ou Momento de Primeira Ordem.
Notação Alternativa: $E\{X\} = \bar{x}$

$$E\{X\} \stackrel{\triangle}{=} \sum_k k \Pr\{X = k\} = 1p + 0(1 - p) = p$$

$$E\{X^2\} \stackrel{\triangle}{=} \sum_k k^2 \Pr\{X = k\} = 1p + 0(1 - p) = p$$

σ_X^2 = **Variância**
ou Momento Centrado de Segunda Ordem.

$$\sigma_X^2 \stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (k - \bar{x})^2 \Pr\{X = k\} = E\{X^2\} - E\{X\}^2$$

$$\sigma_X^2 = p(1 - p) = pq$$

Transformada Z

É um instrumento matemático bastante eficiente no tratamento de Variáveis Aleatórias Discretas, como por exemplo: Bernoulli, Binomial, Geométrica, Poisson, Erlang.

Notação:

- Letras Maiúsculas denotam Variáveis Aleatórias: $X, Y, Z, W, \cdots$
- Letras Minúsculas denotam valores amostrais: $x, y, z, w, \cdots$

Seja X uma Variável Aleatória Discreta.

$$\Pr\{X = k\} \triangleq p_k \geq 0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad , \quad \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

Define-se sua transformada Z como

$$G_X(z) \triangleq \sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k = E\{z^X\}$$

Propriedades de $G_X(z)$

Propriedade

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

Usada para testar eventuais erros nas expressões das transformadas Z de distribuições de probabilidade.

Propriedade

$$\frac{d}{dz} G_X(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k z^{k-1} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k z^{k-1} p_k$$

$$\left. \frac{d}{dz} G_X(z) \right|_{z=1} = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = E\{X\}$$

$$G_X^{(1)}(1) = E\{X\}$$

Usada, como método alternativo à definição, para cálculo da Esperança Matemática.

Propriedade

$$\frac{d^2}{dz^2}G_X(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} z^{k-2}k(k-1)p_k$$

$$G_X^{(2)}(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k$$

$$G_X^{(2)}(1) = E\{X^2\} - E\{X\}$$

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - E\{X\}^2$$

$$\sigma_X^2 = G_X^{(2)}(1) + G_X^{(1)}(1)\left[1 - G_X^{(1)}(1)\right]$$

Note que a **Variância** foi obtida a partir da **transformada** Z da variável aleatória X.

Variável Aleatória de Bernoulli

$$\Pr\{X = 1\} = p > 0 \;\; ; \;\; \Pr\{X = 0\} = 1 - p = q$$

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k = (1 - p) + zp = q + zp$$

$$G_X(z) = q + zp$$

Note que

$$G_X(1) = q + p = 1 \quad ; \quad G_X^{(1)}(1) = p \quad ; \quad G_X^{(2)}(1) = 0$$

Portanto,

$$E\{X\} = p \quad , \quad E\{X^2\} = p \quad , \quad \sigma_X^2 = pq$$

Propriedade

A expansão de $G_X(z)$ em série de Taylor produz

$$G_X(z) = G_X(z_0) + G_X^{(1)}(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} G_X^{(2)}(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots$$

Para $z_0 = 0$, na forma compacta, tem-se

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \, \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Portanto, expandindo $G_X(z)$ em série de Taylor, obtêm-se os p_k's

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \, p_k \quad ; \quad p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Note que, no caso de Bernoulli,

$$G_X(z) = q + zp \quad \Longrightarrow \quad p_0 = q \;\; , \;\; p_1 = p$$

PROPRIEDADE

Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas e independentes, isto é

$$\Pr\{X = x\,; Y = y\} \;=\; \Pr\{X = x\}\Pr\{Y = y\}$$

implicando para quaisquer $f(\cdot), g(\cdot)$

$$E\{f(X)g(Y)\} = E\{f(X)\}E\{g(Y)\}$$

Considere a variável aleatória $W = X + Y$, então

$$G_W(z) = E\{z^W\} = E\{z^{(X+Y)}\} = E\{z^X\}E\{z^Y\}$$

$$G_W(z) = G_X(z)G_Y(z)$$

A transformada Z da **soma** de variáveis aleatórias independentes é o **produto** das transformadas Z.

Este resultado permite uma abordagem simples (alternativa ao processo de contagem) para a definição da variável aleatória **binomial**.

Variável Aleatória Binomial

Considere $X_1, X_2, \ldots X_n$ variáveis aleatórias de Bernoulli, **independentes** e com a mesma distribuição de probabilidade

$$\Pr\{X_i = 1\} = p \ , \ \Pr\{X_i = 0\} = 1 - p = q \quad , \quad i = 1 \cdots n$$

Definindo $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Qual é o valor de $\Pr\{Y = k\} = p_k = ?$

Ou seja, qual a probabilidade de ocorrerem k acertos em n testes ?

No contexto telefônico, qual a probabilidade de k telefones estarem ligados num conjunto de n ?

Calculando $G_Y(z) = G_{X_1}(z) \cdots G_{X_n}(z) = (q + zp)^n$

Expandindo o binômio de Newton, tem-se

$$(q + zp)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (zp)^k q^{(n-k)}$$

$$G_Y(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k \underbrace{\left[\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{(n-k)}\right]}_{p_k}$$

Portanto, para uma **Variável Aleatória Binomial**

$$\Pr\{Y = k\} = p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{(n-k)}$$

Num processo de **contagem**:

- $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ é o número de combinações possíveis de k **acertos** em n **testes**;

- p^k é a **probabilidade** de uma determinada combinação de k **acertos**;

- $q^{(n-k)}$ é a **probabilidade** dos $n - k$ restantes **não-acertos**.

Para uma **Variável Aleatória Binomial**

$$G_Y(z) = (q + zp)^n$$

$$G_Y^{(1)}(z) = n\ \ (q + zp)^{(n-1)}\, p\Big|_{z=1} = np = \bar{y}$$

$$G_Y^{(2)}(z) = n(n-1)\ \ (q + zp)^{(n-2)}\, p^2\Big|_{z=1} = n^2p^2 - np^2$$

$$\sigma_Y^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = npq$$

$$\bar{y} = np \quad , \quad \sigma_Y^2 = npq$$

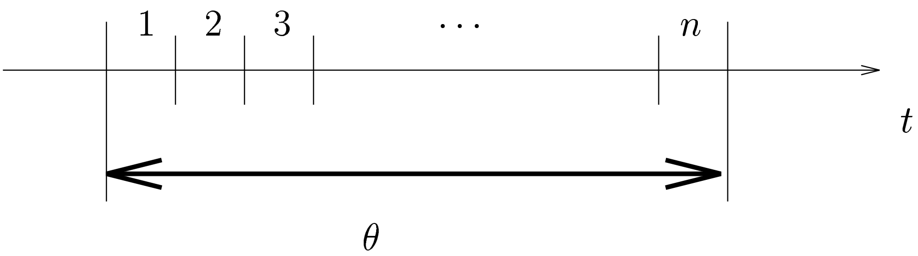
Note que para n variáveis aleatórias **independentes**:

- A **média da soma** é a **soma das médias**
- A **variância da soma** é a **soma das variâncias**

Limite de uma binomial

$$np = \lambda\theta = \text{ constante } \quad ; \quad n \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad p \to 0$$

$$\lambda = \frac{np}{\theta} = \quad \text{taxa média}$$



$$\Pr\{Y = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)}$$

$$\Pr\{Y = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(\lambda\theta)^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda\theta}{n}\right)^{(n-k)}$$

$$(1-p)^{(n-k)} = \left(1 - \frac{\lambda\theta}{n}\right)^{(n-k)} \quad \xrightarrow[n \to +\infty]{} \quad \exp(-\lambda\theta)$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \quad \xrightarrow[n \to +\infty]{} \quad 1$$

Portanto o **Limite de uma binomial** é uma **Poisson**

$$\Pr\{Y = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)}$$

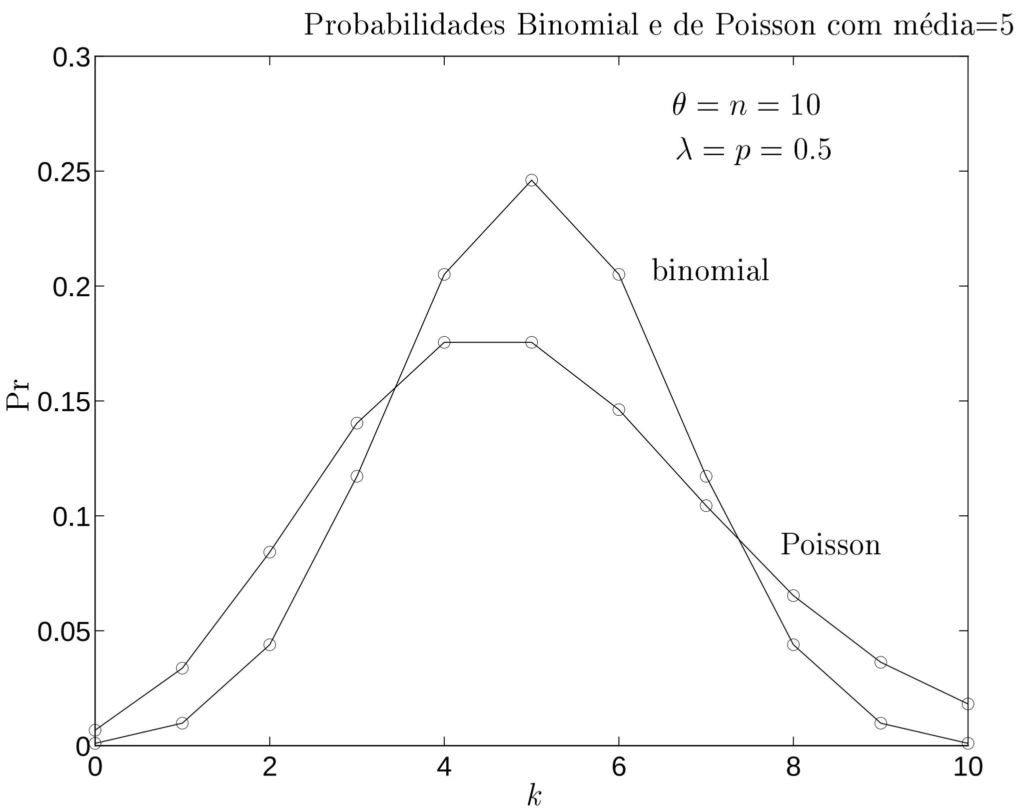
$$\lim_{n \to +\infty} \Pr\{Y = k\} \; = \; \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} \exp(-\lambda\theta)$$

Note que

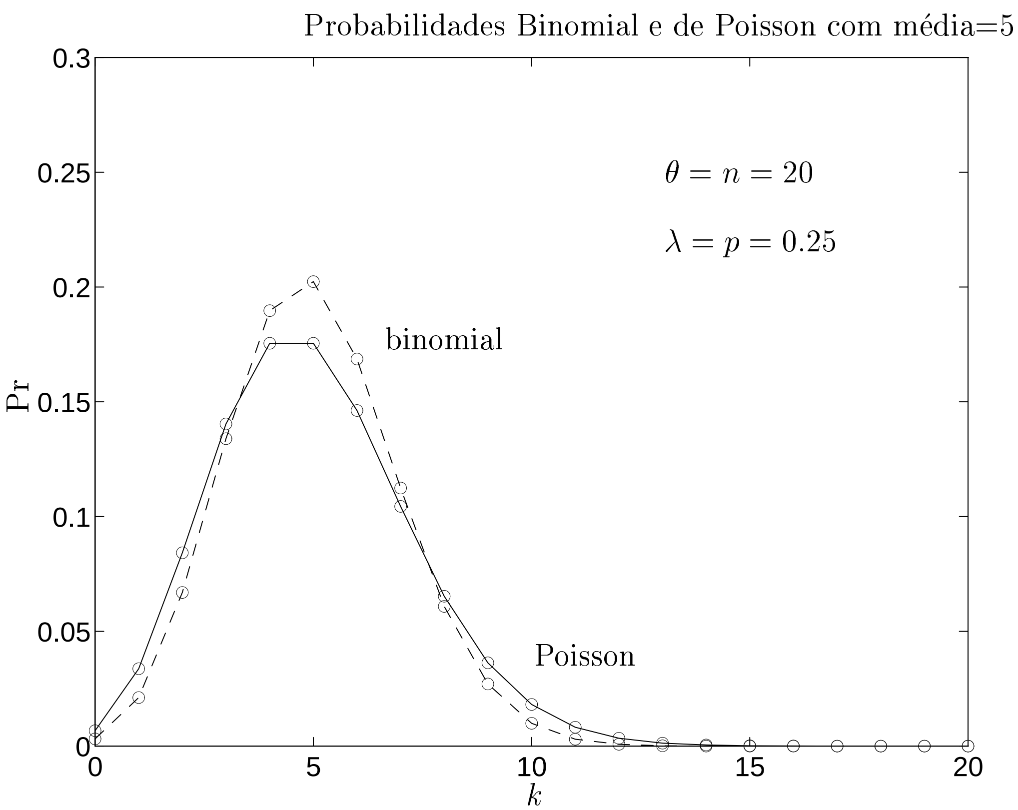
$$\bar{y} = np = \lambda\theta = \quad \text{média}$$

$$\sigma_Y^2 = npq = n \frac{\lambda\theta}{n} \left(1 - \frac{\lambda\theta}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda\theta = \text{variância}$$

$$\text{Média} = \text{Variância} = \lambda\theta$$


Probabilidades Binomial e de Poisson com média=5
$\theta = n = 10$
$\lambda = p = 0.5$
binomial
Poisson
Pr
k
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0
2
4
6
8
10

© p03


Probabilidades Binomial e de Poisson com média=5
$\theta = n = 20$
$\lambda = p = 0.25$
binomial
Poisson
Pr
k
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0
5
10
15
20

© p04

Variável Aleatória de Poisson

$$\Pr\{Y = k\} \;=\; \frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\exp(-\lambda\theta)$$

$$G_Y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z\lambda\theta)^k}{k!}\exp(-\lambda\theta) = \exp(-\lambda\theta)\exp(z\lambda\theta)$$

$$G_Y(z) = \exp\left[\lambda\theta(z-1)\right]$$

Note que $G_Y(1) = 1$.

$$G_Y^{(1)}(z) = \exp\left[\lambda\theta(z-1)\right]\lambda\theta\,\Big|_{z=1} = \lambda\theta$$

$$G_Y^{(2)}(z) = \exp\left[\lambda\theta(z-1)\right](\lambda\theta)^2\,\Big|_{z=1} = (\lambda\theta)^2$$

Portanto,

$$\bar{y} = \lambda\theta$$

$$\sigma_Y^2 = (\lambda\theta)^2 + \lambda\theta\left[1 - \lambda\theta\right] = \lambda\theta$$

$$\text{Média} = \text{Variância} = \lambda\theta$$

A **soma** de variáveis aleatórias **poissonianas independentes** é poissoniana.

Considere a variável aleatória $Y = Y_1 + Y_2$

$$G_Y(z) = E\{z^{(Y_1+Y_2)}\} = E\{z^{Y_1}\}E\{z^{Y_2}\} = G_{Y_1}(z)G_{Y_2}(z)$$

$$G_Y(z) = \exp\left[\lambda_1\theta(z-1)\right]\exp\left[\lambda_2\theta(z-1)\right]$$

$$G_Y(z) = \exp\left[(\lambda_1+\lambda_2)\theta(z-1)\right]$$

Assim $\qquad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$\Pr\{Y = k\} \;=\; \frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\exp(-\lambda\theta)$$

Uma das características marcantes da **Poisson** é que a ocorrências de **eventos simultâneos** tem probabilidade **nula**.

$$\Pr\{Y = k\} \;=\; \frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\exp(-\lambda\theta)$$

Analisando para $\theta = \Delta t \to 0$, e retendo os termos de primeira ordem na série de Taylor

Note que $\quad \exp(-\lambda\Delta t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda\Delta t)^k}{k!}$

$$\Pr\{Y = 0\} = 1 - \lambda\Delta t \;\;,\;\; \Pr\{Y = 1\} = \lambda\Delta t$$

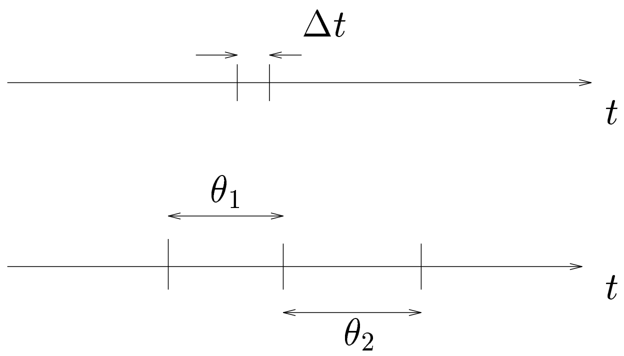
$$\Pr\{Y \geq 2\} = 0$$

Para Δt infinitesimal, há apenas
- uma ocorrência com probabilidade $\lambda\Delta t$,
- ou nenhuma ocorrência com probabilidade $1 - \lambda\Delta t$.

Em outras palavras:

Em processos poissonianos não há ocorrências simultâneas.

Poisson Axiomática



Postulado 1: Para Δt infinitesimal,

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t \quad ; \quad P_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t$$

Note que $P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t) = 1$, onde

$$P_1(\Delta t) \triangleq \Pr\{Y = 1\} \quad ; \quad P_0(\Delta t) \triangleq \Pr\{Y = 0\}$$

Postulado 2: As ocorrências em θ_1 são independentes das ocorrências em θ_2.

$$\Pr\{m \text{ em } \theta_1; n \text{ em } \theta_2\} = P_m(\theta_1)P_n(\theta_2)$$

Determinação da lei que satisfaz os axiomas

$$P_0(t+\Delta t) = \Pr\{0 \text{ em } t\ ;\ 0 \text{ em } \Delta t\} = P_0(t)P_0(\Delta t)$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\left[1-\lambda\Delta t\right]$$

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtém-se

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad ; \quad \text{com} \quad P_0(0) = 1$$

cuja solução é $P_0(t) = \exp(-\lambda t)$.

Repetindo para $k = 1$, tem-se

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)P_0(\Delta t) + P_0(t)P_1(\Delta t)$$

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\left[1-\lambda\Delta t\right] + P_0(t)\lambda\Delta t$$

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtém-se

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

Substituindo $P_0(t)$, tem-se

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda\exp(-\lambda t)$$

cuja solução é $P_1(t) = \lambda t\exp(-\lambda t)$

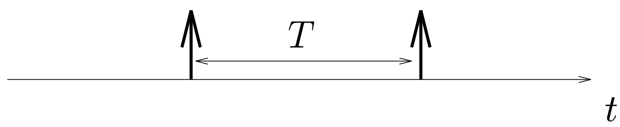
Para k genérico, obtém-se

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t)$$

A Dual de Poisson é Exponencial Negativa

Seja Y uma variável aleatória discreta de **Poisson** representando o número de ocorrências num dado intervalo de observação.

Qual a distribuição da variável aleatória T que representa o tempo entre ocorrências sucessivas ?



Notação: $F_T(t) \triangleq \Pr\{T \leq t\}$ é a função distribuição de probabilidade, cuja derivada é a função densidade de probabilidade, denotada por $p_T(t)$.

$\Pr\{T > t\} = \Pr\{Y = 0 \text{ em } t\}$ probabilidade de não haver ocorrência num intervalo de duração t

$$\Pr\{T > t\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!}\exp(-\lambda t) = \exp(-\lambda t)$$

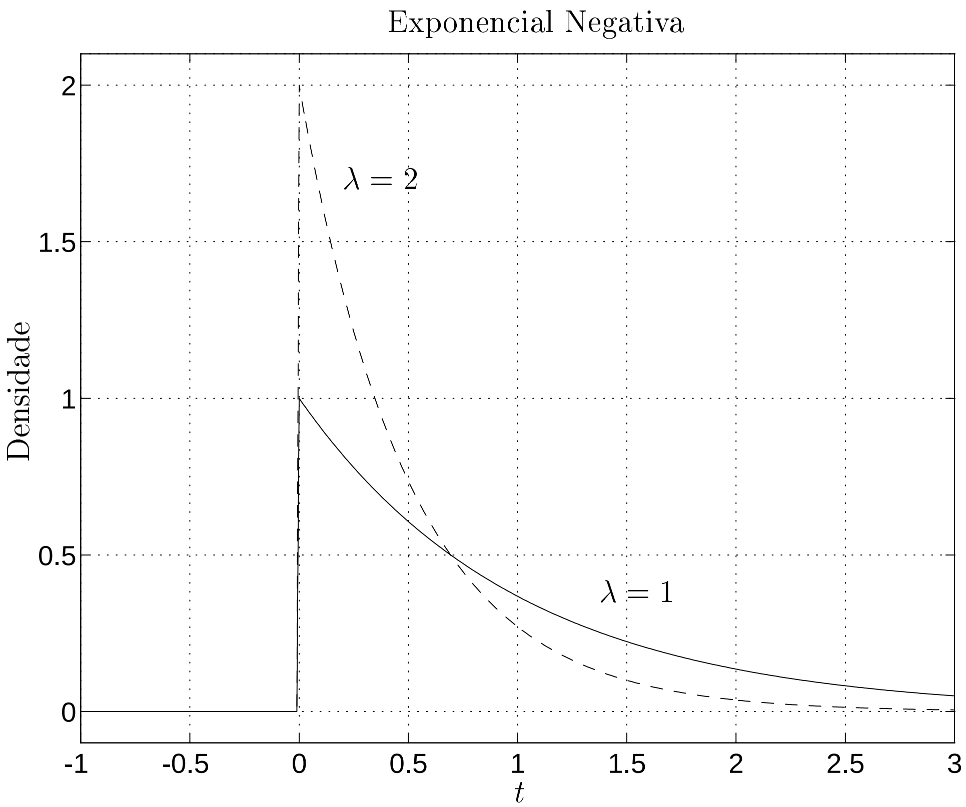
$$F_T(t) = 1 - \Pr\{T > t\} = 1 - \exp(-\lambda t) \quad ; \quad t \geq 0$$

Derivando, obtem-se

$$p_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \quad ; \quad t \geq 0$$

Densidade de Probabilidade Exponencial Negativa

$$p_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \quad ; \quad t \geq 0$$



Exponencial Negativa Axiomática

Postulado 1: $T \geq 0$ é uma variável aleatória contínua, diferenciável.

$$\Pr\{T \leq \tau\} = \int_0^\tau p_T(x)dx$$

Postulado 2: T é **Sem Memória**.

$$\Pr\{T \leq \tau\} = \Pr\{T \leq \tau + t \ / \ T > t\}$$

Determinação da lei que satisfaz os axiomas

$$\Pr\{T \leq \tau + t \ / \ T > t\} = \frac{\Pr\{T \leq \tau + t \ ; \ T > t\}}{\Pr\{T > t\}}$$

$$\int_0^\tau p_T(x)dx \ = \ \frac{\int_t^{t+\tau} p_T(x)dx}{1 - \int_0^t p_T(x)dx}$$

Para $\tau \to 0^+$, pelo Teorema do Valor Médio,

$$p_T(0)d\tau \ = \ \frac{p_T(t)d\tau}{1 - \int_0^t p_T(x)dx}$$

Definindo $p_T(0) = \lambda$, tem-se

$$\lambda \left[1 - \int_0^t p_T(x)dx\right] = p_T(t)$$

Derivando, $\quad \dfrac{dp_T(t)}{dt} = -\lambda p_T(t) \;\; ; \;\; \text{com} \quad p_T(0) = \lambda$

cuja solução é

$$p_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \quad ; \quad t \geq 0$$

Note que $\qquad \Pr\{T > t\} = \exp(-\lambda t)$

Seja $\beta(t)\Delta t$ a probabilidade que haja **uma ocorrência** entre t e $t + \Delta t$

$$\beta(t)\Delta t = \Pr\{t < T \leq t + \Delta t \;/\; T > t\} = \frac{\int_t^{t+\Delta t} p_T(x)dx}{\Pr\{T > t\}}$$

$$\beta(t)\Delta t = \frac{p_T(t)\Delta t}{\Pr\{T > t\}}$$

Para os processos com tempo exponencial negativo

$$\beta(t)\Delta t = \frac{\lambda \exp(-\lambda t)\Delta t}{\exp(-\lambda t)} = \lambda \Delta t$$

A probabilidade que haja **uma ocorrência** entre t e $t+\Delta t$ é sem memória, isto é, **não varia com o tempo**.

Média e Variância da Exponencial Negativa

Transformada de Laplace:

$$P_T(s) = \mathcal{L}[p_T(t)] = \mathcal{L}[\mu \exp(-\mu t) u(t)]$$

$$P_T(s) = \int_0^{+\infty} p_T(t) \exp(-st) dt = \frac{\mu}{s+\mu}$$

Teste: $\qquad P_T(0) = \int_0^{+\infty} p_T(t) dt = 1$

$$\left.\frac{dP_T(s)}{ds}\right|_{s=0} = \int_0^{+\infty} (-t) p_T(t) \exp(-st) dt = -E\{T\}$$

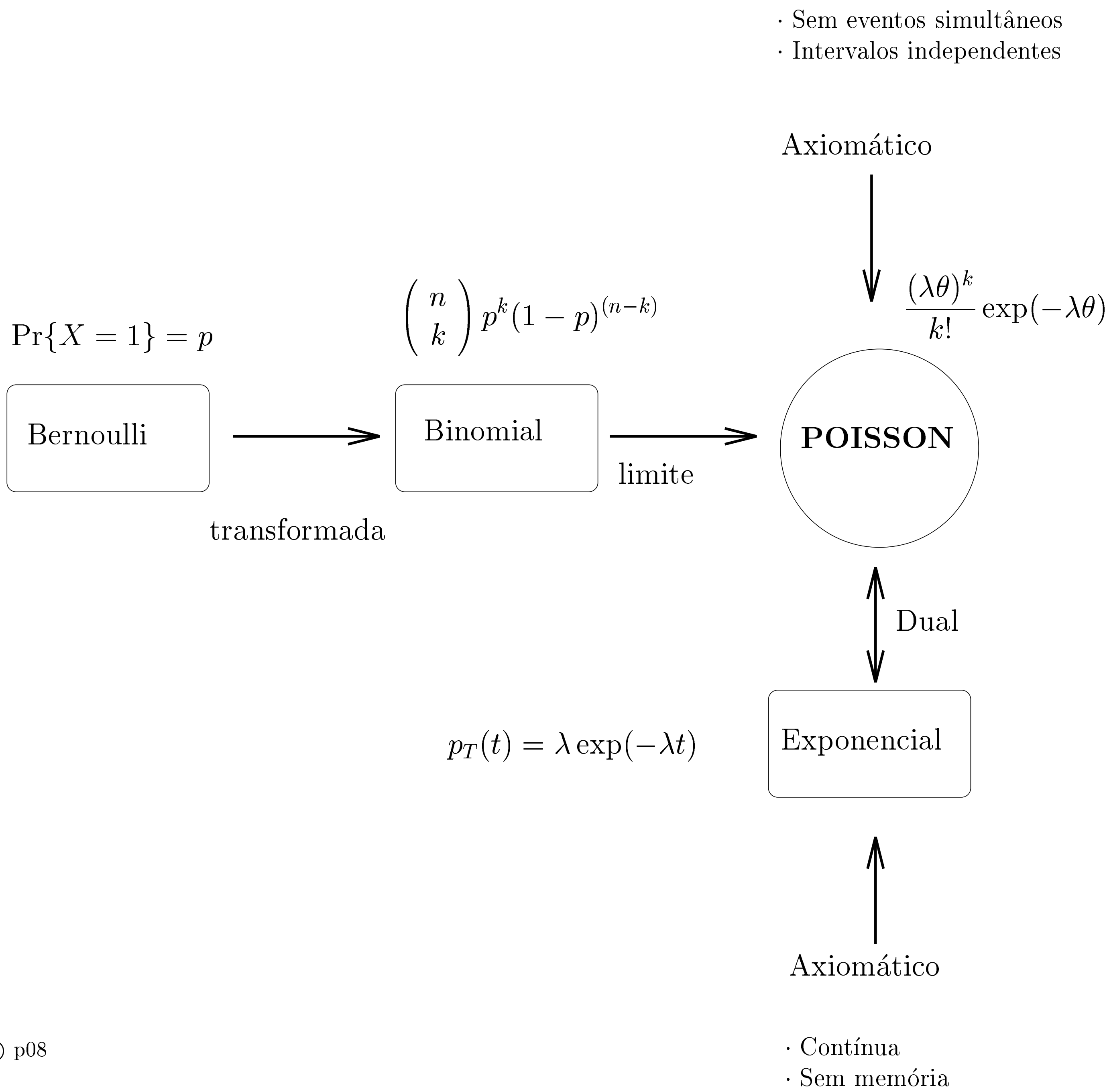
Portanto $\qquad E\{T\} = -\left.\frac{-\mu}{(s+\mu)^2}\right|_{s=0} = \frac{1}{\mu}$

Variância σ^2

$$\left.\frac{d^2 P_R(s)}{ds^2}\right|_{s=0} = \int_0^{+\infty} t^2 p_T(t) \exp(-st) dt = E\{T^2\}$$

$$E\{T^2\} = \left.\frac{d^2 P_R(s)}{ds^2}\right|_{s=0} = \left.\frac{2\mu}{(s+\mu)^3}\right|_{s=0} = \frac{2}{\mu^2}$$

$$\sigma^2 = E\{T^2\} - E\{T\}^2 = \frac{1}{\mu^2}$$


· Sem eventos simultâneos
· Intervalos independentes
Axiomático
$\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\exp(-\lambda\theta)$
$\Pr\{X=1\}=p$
$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}$
Bernoulli
Binomial
POISSON
limite
transformada
Dual
$p_T(t)=\lambda\exp(-\lambda t)$
Exponencial
Axiomático
· Contínua
· Sem memória