UNIFACCAMP
MESTRADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Análise de Algoritmos e Complexidade da Computação
Lista de Exercícios 3

Prof. Osvaldo.

1. Sejam *A*, *B e C* conjuntos. Prove as seguintes propriedades
   a) Distributiva: $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;
   b) Morgan: $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

2. Prove as seguintes propriedades lógicas:
   a) Distributiva: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
   b) Morgan: $x \vee y = \neg (\neg x \wedge \neg y)$.

3. Mostre que a classe de complexidade de problemas **P** é fechada para união, intersecção, complemento, concatenação e fecho de kleene. Isto é, se as linguagens L, L_1 e $L_2 \in$ **P**, então:

   a) $L_1 \cup L_2 \in$ **P**;
   b) $L_1 \cap L_2 \in$ **P**;
   c) $\overline{L} \in$ P;
   d) $L_1 . L_2 \in$ **P**;
   e) $L^* \in$ **P** .

4. Mostre que a classe de complexidade de problemas **NP** é fechada para união, intersecção, concatenação e fecho de Kleene. Isto é, se as linguagens L, L_1 e $L_2 \in$ **NP**, então:

   a) $L_1 \cup L_2 \in$ **NP**;
   b) $L_1 \cap L_2 \in$ **NP**;
   c) $L_1 . L_2 \in$ **NP**;
   d) $L^* \in$ **NP** .

5. Mostre que as seguintes linguagens pertencem a **NP**.
   a) $L_{\text{CICLO HAM}}$ = { #grafo G# | existe um ciclo hamiltoniano no grafo G };
   b) $L_{\text{3-COLORING}}$ = { #grafo G# | G admite uma coloração válida com três cores };
   c) $L_{\text{SUBSET-SUM}}$= { #S#*k*# | existe subconjunto S' de S tal que a soma dos elementos de S' seja igual a *k* };

6. Mostre que **P** $\subseteq$ co-**NP**.

7. Mostre que se **NP** $\neq$ **co-NP** então **P** $\neq$ **NP**.

8. Mostre que a relação $\leq_p$ é uma relação transitiva entre linguagens. Isto é, $L_1 \leq_p L_2$ e $L_2 \leq_p L_3$ então $L_1 \leq_p L_3$.

9. Mostre que $L \leq_p \overline{L}$ se e somente se $\overline{L} \leq_p L$.

10. Mostre que qualquer linguagem em NP pode ser decidida por um algoritmo em um tempo $2^{O(n^k)}$, para alguma constante k > 0.

11. O professor José Sabido mostrou que um problema de decisão (linguagem) L pode ser reduzido em tempo polinomial a um problema (linguagem) NP-completo M. Além disso, após 80 páginas de matemática complicada, ele mostrou que L pode ser resolvido em tempo polinomial. Ele acabou de mostrar que **P** = **NP**? Por que?

12. O professor José Sabido acaba de projetar um algoritmo que recebe um grafo G com *n* vértices e determina em tempo $O(n^c)$, $c > 0$, se G contém uma clique de tamanho igual a *k*. O professor José Sabido merece o Prêmio Turing da ACM (http://en.wikipedia.org/wiki/Turing_Award) por ter acabado de mostrar que **P = NP**? Por que?

13. Mostre que toda linguagem L em **P** pode ser reduzida em tempo polinomial à linguagem M = { #*y*# | *y* = 5 }, linguagem correspondente ao problema de decisão que determina se *y* = 5. Verifique também que uma linguagem L em **P** não pode ser reduzida à linguagem $\emptyset$ e também à linguagem Σ^*.

14. Admitindo que $L_{\text{PARTIÇÃO}} \in$ **NP-completo**, mostre que $L_{\text{SUBSET-SUM}} \in$ **NP-completo.**

15. Admitindo que $L_{\text{SUBSET-SUM}} \in$ **NP-completo**, mostre que $L_{\text{MOCHILA}} \in$ **NP-completo.**